„Ekonomista” 2013, nr 2
http://www.ekonomista.info.pl

ROBERT GOLAŃSKI*

Teoria stabilnych alokacji i dopasowań: Lloyd Shapley i Alvin Roth – laureaci Nagrody Nobla w dziedzinie ekonomii w 2012 r.**

W roku 2012 nagroda Banku Szwecji im. Alfreda Nobla w dziedzinie ekonomii przyznana została dwóm amerykańskim naukowcom, Lloydowi Shapleyowi i Alvinowi Rothowi za teorię stabilnych alokacji i jej wykorzystywanie przy projektowaniu mechanizmów rynkowych.

Urodzony w 1923 r. Lloyd Shapley zagadnieniami dotyczącymi teorii gier zajmował się od wczesnych lat 50. XX w., wprowadzając w swojej pracy doktorskiej pewne pojęcia kluczowe dla tej dziedziny wiedzy takie jak wartość Shapleya. Przez wiele lat związany był ze znaną ze swojego wkładu w metody ilościowe Korporacją RAND, a od 1981 r. jest profesorem UCLA (Uniwersytetu Kalifornijskiego w Los Angeles). Młodszy od niego o 28 lat Alvin Roth, znany głównie ze swoich prac dotyczących teorii gier i ekonomii eksperymentalnej, związany jest od kilkunastu lat z jedną czołowych szkół biznesu na świecie, Harvard Business School, w bieżącym roku zamierza natomiast powrócić na Uniwersytet Stanforda, uczelnię, w której uzyskał dyplom magisterski i obronił pracę doktorską.

1. Stabilność rozwiązania w grach niekooperacyjnych

Poszukiwanie stabilnych rozwiązań jest głównym obszarem zainteresowania zarówno teorii gier kooperacyjnych, jak niekooperacyjnych. Pochodzący od von Neumanna i Morgensterna (1944) oraz Nasha (1951) podział na gry kooperacyjne i niekooperacyjne nie oznacza – jak mogłaby sugerować nazwa – czy gracze ze sobą współpracują czy nie, ale czy mogą zawierać pomiędzy sobą wiążące ich umowy. Stosowane w grach niekooperacyjnych (a więc przy założeniu, że gracze będą zachowywali się tak, aby uzyskać jak najkorzystniejszy dla siebie wynik, a umowy będą dotrzymywane tylko, jeśli jest to korzystne dla każdego gracza z osobna) koncepcje rozwiązań poszukują próby odpowiedzi na pytanie, w jaki sposób gracze powinni się zachowywać, aby takie indywidualnie najkorzystniejsze

* Dr Robert Golański – Katedra Matematyki i Ekonomii Matematycznej, Szkoła Główna Handlowa w Warszawie; e-mail: robert.golanski@sgh.waw.pl

** Autor pragnie bardzo serdecznie podziękować prof. dr hab. Honoracie Sosnowskiej za niezwykle cenne uwagi pomocne przy pisaniu niniejszego artykułu.

rozwiązania uzyskać. Podstawową z takich koncepcji rozwiązań jest równowaga Nasha (1950), w której wymaga się, aby każdy z graczy zachowywał się optymalnie, biorąc za dane zachowanie pozostałych. Rozwiązanie proponowane przez Nasha (laureata Nagrody Nobla z 1994 r.) jest stabilne w tym sensie, że jeśli zostało ono osiągnięte, to żaden z graczy nie będzie miał bodźca do zmiany swojego zachowania. Tak rozumiana stabilność rozwiązania może dawać jednak również dość nieintuicyjne odpowiedzi na pytanie o to, jakie zachowanie optymalizuje wypłatę decydentów. Najbardziej znanym chyba przykładem prostej sytuacji, będącej obszarem zainteresowania teorii gier, jest dylemat więźnia, czyli gra o następującej strukturze wypłat:

		Gracz 2	
		A	*B*
Gracz 1	*A*	3, 3	0, 5
	B	5, 0	1, 1

Każdy z graczy równocześnie dokonuje wyboru między decyzjami *A* i B, a w wyniku podjętych decyzji osiągają oni wypłaty znajdujące się na przecięciu wiersza i kolumny odpowiadających ich wyborom (pierwsza liczba określa wypłatę gracza 1, a druga gracza 2). Widać, że dla każdego gracza indywidualnie racjonalnym wyborem jest wybór decyzji *B* – niezależnie od tego, jak zachowa się drugi z graczy, gdyż daje ona wyższą wypłatę. Podjęcie przez obu z graczy decyzji *B* tworzy rzeczywiście w tej grze jedyną równowagę Nasha. Układ jest wówczas stabilny w tym sensie, że nikt nie chce swojej decyzji zmienić, gdyż zmiana taka wiązałaby się ze zmniejszeniem uzyskanej wypłaty. Indywidualnie racjonalne zachowanie każdego gracza oznacza jednak, że każdy z nich uzyskuje wypłatę równą 1, gdy tymczasem można było uzyskać w tej grze wynik, który byłby korzystniejszy dla każdego z decydentów: wybór *A* przez każdego z nich dałby im wypłatę równą 3. Wypłaty uzyskiwane w równowadze Nasha nie muszą zatem być optymalne w sensie paretowskim.

Innym prostym przykładem ilustrującym pewien nieintuicyjny skutek założenia, że rozwiązanie powinno być stabilne w sensie, w jakim wymaga tego równowaga Nasha, jest następująca gra:

		Gracz 2	
		A	*B*
Gracz 1	*A*	2,2	0,0
	B	0,0	1, 1

Gra ta nie ma charakteru konkurencyjnego, chodzi w niej o skoordynowanie się na wspólnym wyborze takiej samej decyzji, przy czym obustronny wybór *A* przez decydentów daje wypłaty wyższe niż wybór *B*. Oczywiście wybór *A* przez obu graczy tworzy w tej grze równowagę Nasha. Równowagę Nasha tworzy jednak również wybór przez każdego gracza decyzji *B*, pomimo że prowadzi do niższych wypłat. Stabilność równowagi Nasha wymaga bowiem jedynie, aby wybór dokonany przez każdego z decydentów był optymalny biorąc za dane zachowanie pozostałych graczy, a ten warunek jest również spełniony przy obustronnym wyborze *B* – jeśli gracz 2 wybiera *B*, to gracz 1 nie może uzyskać wypłaty równej 2 i najkorzystniej przy danym zachowaniu gracza 2 jest dla niego samego wybrać *B*, które maksymalizuje w tej sytuacji jego wypłatę. Gra jest symetryczna i takie samo rozumowanie można przeprowadzić w przypadku gracza 2. Stabilność wymagana przez równowagę Nasha nie próbuje bowiem udzielić odpowiedzi na pytanie, dlaczego gracze mieliby dokonać określonych wyborów, a raczej, czy jeśli już dane wybory zostały dokonane, to czy którykolwiek z graczy ma bodziec do zmiany swojej własnej decyzji. Warto zresztą zauważyć, że o ile w tego typu prostej grze może się wydawać oczywiste, że gracze stojąc przed tym wyborem będą się koordynować na korzystniejszej dla nich równowadze Nasha (A, A), o tyle wyniki eksperymentów w bardziej złożonych grach pokazują, że istnieją sytuacje, w których gracze nie tylko nie koordynują się na równowagach dających najwyższe wypłaty, ale mogą się koordynować na równowagach, które są w sensie paretowskim najgorsze (np. seria eksperymentów przeprowadzonych przez van Huycka, Battalio i Beila (1990)).

Ważnym wynikiem uzyskanym przez Nasha jest wykazanie, że jeżeli dopuścimy możliwość, że gracze będą się zachowywali w sposób losowy i utożsamimy strategię każdego z nich z rozkładem prawdopodobieństwa na rzeczywistych wyborach, to każda skończona gra – czyli taka, w której jest skończona liczba graczy i każdy z nich ma skończoną liczbę strategii – będzie posiadała przynajmniej jedną równowagę Nasha.

2. Rdzeń jako rozwiązanie stabilne w grach kooperacyjnych

Inaczej do odpowiedzi na pytanie o osiągnięty wynik podchodzi teoria gier kooperacyjnych. Wprowadzone dodatkowo założenie o tym, że gracze mogą zawierać wiążące porozumienia, oznacza, że problem koordynacji na wyniku, który nie jest paretowsko optymalny nie istnieje – gracze będą zawierali porozumienia, które są dla nich najkorzystniejsze i wybranie nieoptymalnego wyniku oznaczałoby, że warunek ten nie jest spełniony. Koncepcje rozwiązań gier kooperacyjnych skupiają się zatem na próbie odpowiedzi na pytanie, w jaki sposób gracze powinni podzielić pomiędzy siebie uzyskane wypłaty. Naturalnym rozszerzeniem pojęcia równowagi Nasha jest koncepcja rdzenia – podobnie jak równowaga Nasha próbuje ona odpowiedzieć na pytanie, które układy strategii będą stabilne w tym sensie, że żaden z graczy nie będzie miał bodźca do zmiany swojej własnej decyzji. Rdzeń wyznacza wszystkie podziały, które są stabilne w tym sensie, że nie istnieje żaden podzbiór graczy, który wolałby zawrzeć porozumienie wyłącznie pomiędzy sobą i uzyskałby w ten sposób wyższe wypłaty. Sposób poszukiwania odpowiedzi o przewidywane podziały oznacza zatem konieczność określenia, jakie wypłaty mogą zostać osiągnięte przez każdy podzbiór zbioru graczy, jeśli zawarte porozumienie ograniczy się tylko do niego. Funkcję określającą takie wypłaty każdego podzbioru zbioru graczy nazywamy funkcją charakterystyczną. W przypadku opisanego powyżej dylematu więźnia funkcja taka wyglądałaby w taki sposób, że zbiorowi {gracz 1, gracz 2} przypisałaby ona wypłatę równą 6 – tyle wynosi bowiem maksymalna suma wypłat, którą gracze mogą uzyskać, jeśli mogą w wiarygodny sposób ograniczyć swój wybór. Bez wiążącego charakteru takiej umowy każdy z graczy miałby w takiej sytuacji oczywiście bodziec do zmiany swojej decyzji z A na B i zwiększenia swojej własnej wypłaty z 3 do 5 kosztem drugiego gracza, co ostatecznie prowadzi do sytuacji, w której każdy gracz uzyskuje wypłatę równą 1. Gracze będą zatem woleli zawrzeć umowę o samoograniczeniu się do wyboru A, jeśli rzeczywiście istnieje możliwość zawarcia takiej umowy w wiążący sposób. Jednocześnie każdy z graczy – bez zawierania umowy z drugim decydentem – może zagwarantować sobie wypłatę równą 1 (poprzez wybór decyzji B), tyle zatem wyniesie wartość funkcji charakterystycznej każdego gracza z osobna. Do rdzenia będą należały zatem wszystkie takie podziały, w których gracze łącznie uzyskują wypłaty równie w sumie 6, ale każdemu z nich przypadnie co najmniej 1 – każdy taki podział będzie stabilny w tym sensie, że nie będzie istniał żaden podzbiór zbioru graczy, dla którego korzystniej byłoby się wyłamać i zawrzeć porozumienie wyłącznie pomiędzy sobą.

O ile jednak nałożenie tego typu warunku stabilności w grach niekooperacyjnych pozwoliło Nashowi wykazać istnienie rozwiązania w każdej grze skończonej, o tyle nawet w przypadku stosunkowo prostych gier kooperacyjnych może się okazać, że żadne rozwiązanie stabilne nie istnieje, a zatem rdzeń jest pusty. Przykładem takiej gry może być głosowanie większością w grupie trzyosobowej. Jeśli trzy osoby mają pomiędzy siebie podzielić jednostkę dobra i o wybranym podziale będzie decydować większość bezwzględna (a zatem w tym przypadku dowolne dwie osoby mogą określić, jaki podział powinien zostać wybrany – w szczególności dowolne dwie osoby mogą podzielić całe dobro pomiędzy siebie, wykluczając z udziału trzeciego gracza), to funkcja charakterystyczna takiej gry będzie wyglądać w taki sposób, że każdemu trzy- i dwuosobowemu podzbiorowi zbioru graczy przypisze wartość 1, a podzbiorowi złożonemu z jednego gracza wartość 0 (bo żaden gracz samodzielnie nie jest w stanie zapobiec temu, aby pozostali dwaj nie weszli w porozumienie większościowe, które wykluczy go w pełni z udziału w podziale). Stabilny podział należący do rdzenia powinien zatem dzielić jednostkę dobra w taki sposób, aby każda dwuelementowa grupa uzyskiwała co najmniej 1 – bo jeśli istnieje para graczy, która uzyskuje mniej, to będzie ona wolała zawrzeć porozumienie wyłącznie pomiędzy sobą i powiększyć w ten sposób wypłaty uzyskiwane przez siebie. Takie podziały jednak nie istnieją, a rdzeń jest w takim razie pusty. Łatwo zresztą widać, że rzeczywiście dla każdego podziału da się znaleźć parę graczy, która go zakwestionuje – np. jeśli gracz 1 i 2 zawarliby porozumienie o podziale między sobą równo po połowie dzielonej jednostki, to wykluczony gracz 3 mógłby zaproponować któremukolwiek z pozostałych porozumienie, na którym skorzystaliby obaj zainteresowani (np. takie, w którym gracz 1 otrzymuje 0,7, a gracz 3 dostaje 0,3).

Lloyd Shapley, starszy z uhonorowanych tegoroczną Nagrodą Nobla naukowców, zagadnieniami teorii gier, głównie kooperacyjnych, zajmował się prawie od samego początku rozwoju tej dziedziny, od wczesnych lat 50. Zaproponowanie rozsądnej koncepcji rozwiązania gier kooperacyjnych, spełniającej pewne minimalne warunki dotyczące stabilności, było jednym z głównych zagadnień badanych przez Shapleya. Ze względu na fakt, że rdzeń może się okazać w pewnych grach pusty, istotne stało się z jednej strony ustalenie warunków, przy których problem ten nie wystąpi, a z drugiej strony – zaproponowanie alternatywnej koncepcji rozwiązania, którą można by stosować w grach, w których rdzeń jest pusty. Nazwisko Shapleya łączone jest z ważnymi ustaleniami dotyczącymi obu tych zagadnień.

3. Warunki istnienia niepustego rdzenia

Bondarewa (1963) i niezależnie od niej Shapley (1967) udowodnili twierdzenie, które podaje warunek konieczny i wystarczający do tego, aby gra posiadała niepusty rdzeń. Warunek ten ma postać następującą:

Niech N oznacza zbiór graczy, a f funkcję charakterystyczną gry (f: $2^N \to R$). Gra ma niepusty rdzeń wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej funkcji α: $2^N \setminus \phi \to R$ takiej, że dla każdego $i \in N$ zachodzi $\sum_{S \subseteq 2^N : i \in S} \alpha(S) = 1$, spełniony jest warunek:

$$\sum \alpha(S) f(S) \leqslant f(N).$$

Gry spełniające warunek Bondarewej-Shapleya nazywa się grami zrównoważonymi.

Inną ważną klasą gier, dla których istnieje gwarancja niepustości rdzenia (aczkolwiek jest to warunek wyłącznie wystarczający, ale nie konieczny), jest wypukłość gry. Shapley (1971) pokazał, że jeśli funkcja charakterystyczna f spełnia warunek, że dla dowolnych podzbiorów K i L zbioru graczy zachodzi warunek:

$$f(K) + f(L) \leqslant f(K \cup L) + f(K \cap L),$$

to gra taka będzie miała rzeczywiście niepusty rdzeń.

4. Wartość Shapleya

Shapley (1953) proponuje również inną koncepcję rozwiązania dla gier kooperacyjnych, która zawsze istnieje i dla każdej gry jest jednoznacznie określona, nazywaną współcześnie wartością Shapleya. Wartość ta aksjomatyzowana jest na różne sposoby. Przykładowa aksjomatyzacja podana jest poniżej.

Niech N oznacza zbiór graczy, f funkcję charakterystyczną gry, a ϕ_i szukaną wartość przypisaną graczowi $i \in N$. Jeżeli są spełnione następujące warunki:

– efektywność $\sum \varphi_i = f(N)$;
– symetria (dla każdych $i, j \in N$ oraz $S \subseteq N$ takiego, że $\{i, j\} \subseteq S$, jeśli $f(S \cup \{i\}) = f(S \cup \{j\})$, to $\phi_i = \phi_j$;
– addytywność (dla każdych dwóch gier określonych za pomocą funkcji charakterystycznych f oraz g i dla każdego gracza i zachodzi warunek $\phi_i(f + g) = \phi_i(f) + \phi_i(g)$;
– gracz, który nie zmienia wartości funkcji charakterystycznej żadnego zbioru ma wartość równą zero (jeśli dla każdego $S \subseteq N$ zachodzi $f(S) = f(S \cup \{i\})$, to $\phi_i = 0$);

to jedyną funkcją spełniającą te warunki, pozwalającą określić ϕ_i, jest:

$$\sum\nolimits_{S \subseteq N:\{i\} \not\subseteq S} \frac{|S|!(|N| - |S| - 1)!}{|N|!} (f(S \cup \{i\} - f(S)).$$

Wartość Shapleya można zatem interpretować jako średni krańcowy wkład danego gracza w wartość koalicji przy założeniu, że każda kolejność dołączania graczy do koalicji jest tak samo prawdopodobna.

Shapley pokazał również, że w grach wypukłych nie tylko rdzeń jest niepusty, lecz także wartość Shapleya należy do rdzenia i znajduje się w jego środku geometrycznym.

5. Indeks Shapleya-Shubika

Szczególnym przypadkiem zastosowania wartości Shapleya w praktyce jest indeks Shapleya-Shubika (1954), pozwalający określić np. siłę decydentów podejmujących decyzję przez głosowanie, mierzoną prawdopodobieństwem tego, że głos danego decydenta spowoduje rzeczywiście zmianę wyniku głosowania. Indeks Shapleya-Shubika równy jest wartości Shapleya w grze kooperacyjnej, dla której funkcja charakterystyczna jest określona w sposób wiążący jej wartości z tym, czy dany podzbiór graczy tworzy koalicję wygrywającą: jeśli dana koalicja jest wygrywająca, czyli jeśli posiada liczbę głosów niezbędną do podjęcia decyzji, to przypisuje się jej wartość funkcji charakterystycznej równą 1, w przeciwnym natomiast razie wartość równą 0. Ze względu na fakt, że wartość Shapleya danego gracza można interpretować jako średnią krańcową zmianę wartości koalicji następującą w wyniku dołączenia takiego gracza do koalicji, w grach o funkcji charakterystycznej zdefiniowanej w taki właśnie zero-jedynkowy sposób interpretacja ta nabiera szczególnego charakteru. W prostych ważonych grach większości, które da się scharakteryzować w pełni przez dodatnią liczbę głosów każdego gracza oraz regułę decyzyjną określającą minimalną sumę głosów potrzebną do podjęcia decyzji, oznacza to, że krańcowy wkład gracza może wynieść 0 – jeśli koalicja była wygrywająca bez danego gracza (i wówczas pozostanie ona wygrywająca po jego dołączeniu, gdyż liczba głosów każdego gracza jest zgodnie z założeniem dodatnia) lub jeśli koalicja po dołączeniu gracza nie jest wygrywająca (a zatem nie była również wygrywająca przed jego dołączeniem), albo 1 – jeśli koalicja stała się z przegrywającej wygrywającą na skutek dołączenia do niej danego gracza. Ponieważ jednak dla każdej kolejności wchodzenia graczy w koalicję da się w jednoznaczny sposób określić gracza, który spowoduje taką właśnie zmianę z koalicji przegrywającej na wygrywającą, indeks Shapleya-Shubika można interpretować jako prawdopodobieństwo takiego zdarzenia i stosować jako miarę siły danego gracza.

Indeks Shapleya-Shubika stosować można oczywiście w każdej grze, w której decyzje podejmowane są przez głosowanie i wykorzystywać do ustalenia siły poszczególnych graczy w sytuacjach takich jak badanie siły akcjonariuszy podczas walnego zgromadzenia w spółce akcyjnej (każdy akcjonariusz posiada pewną liczbę głosów związaną z liczbą posiadanych akcji, a do podjęcia decyzji potrzeba określonej sumy głosów), czy badanie siły poszczególnych państw w Radzie Unii Europejskiej. W tym drugim przypadku reguła decyzyjna jest bardziej złożona, gdyż oparta na systemie podwójnej (w traktacie lizbońskim) lub potrójnej (w obecnie jeszcze obowiązującym traktacie nicejskim) większości, gdzie do podjęcia decyzji trzeba dysponować zarówno odpowiednio dużą sumą ludności, jak i poparciem odpowiednio dużej liczby państw, a w traktacie nicejskim konieczne jest również uzbieranie odpowiednio dużej sumy wag przyznanej każdemu państwu.

Kiedy podejmowano decyzję o odejściu od arbitralnych wag przewidywanych przez traktat nicejski na rzecz systemu opartego wyłącznie na liczbie ludności, w mediach toczyła się dyskusja o tym, który system byłby dla Polski korzystniejszy. Rzadko odwoływano się w niej jednak do oceny siły za pomocą mierników takich jak indeks Shapleya-Shubika, częściej polegając na wskaźnikach prostszych, takich jak np. ocena, który system przyznaje Polsce większą względną wagę (czyli większą względną liczbę głosów).

Warto jednak zauważyć, że indeksy siły mają często pewne nieintuicyjne właściwości. Łatwo zaobserwować to na przykładzie układu sił w polskim Sejmie. Przy założeniu, że można każdą z partii utożsamić z pojedynczym decydentem (czyli że partie blokują *en bloc*, co w ważniejszych głosowaniach – takich jak powołanie rządu – jest rzeczywiście z dobrym przybliżeniem spełnione) oraz że partie nie kierują się względami ideologicznymi i każda kolejność tworzenia koalicji jest równie prawdopodobna, można wyznaczyć indeks Shapleya-Shubika dla poszczególnych klubów parlamentarnych. Bezpośrednio po wyborach 2011 r. wynosiłby on 0,6 dla Platformy Obywatelskiej oraz po 0,1 dla każdego z pozostałych czterech klubów (Mniejszość Niemiecka z jednym posłem jest ugrupowaniem z punktu widzenia tworzenia koalicji większościowej nieistotna – nie istnieje taka konfiguracja pozostałych partii, która miałaby dokładnie 230 głosów, tak aby dołączenie do niej posła Galli dało jej wymaganą większość bezwzględną). Można zauważyć, że ze względu na fakt, że układ sił w Sejmie wyglądał w taki sposób, że PO mogła utworzyć koalicję większościową z każdą z pozostałych partii, ale rząd bez niej musiałby oznaczać porozumienie wszystkich pozostałych czterech, indeks siły przyporządkowuje taką samą wartość każdemu z tych ugrupowań – taką samą siłą dysponuje zatem Prawo i Sprawiedliwość ze 157 posłami, co Sojusz Lewicy Demokratycznej z 27 posłami. Podobnie Prawo i Sprawiedliwość ma prawie trzykrotnie niższą wartość indeksu Shapleya-Shubika niż

Platforma Obywatelska, pomimo że dysponuje niewiele mniejszą liczbą głosów. Widać zatem, że sama waga, czyli w tym przypadku liczba posłów, nie jest dobrą miarą siły. Porównując wyniki wyborów 2011 r. z wynikami wyborów 2007 r. można zauważyć również występowanie opisanego przez Fischera i Schottera paradoksu redystrybucji: PO zdobywając w wyborach 2007 r. więcej miejsc w Sejmie (209) niż w 2011 r. (207) dysponowała mniejszą siłą – jej indeks Shapleya-Shubika wynosił w 2007 r. 0,5 w porównaniu z 0,6 w 2011 r.

6. Algorytm Gale'a-Shapleya

Osiągnięciem, które w największym stopniu docenione zostało przez komitet przyznający Nagrodę Nobla, był algorytm dopasowujący do siebie elementy z różnych rozłącznych zbiorów.

Algorytm ten nazwany przez Gale'a i Shapleya (1962) (Gale zmarł w 2008 r. i nie mógł podzielić tegorocznej nagrody) algorytmem poszukiwania stabilnych małżeństw, opiera się na mechanizmie odroczonej akceptacji i działa w sposób następujący. Załóżmy, że mamy dwie rozłączne grupy M i K, takie że każdy decydent z jednej grupy ma określone preferencje w stosunku do członków drugiej. Jedna z tych grup zostaje wyróżniona jako grupa, której członkowie składają oferty połączeń. W rundzie pierwszej członkowie grupy składającej oferty proponują połączenie („zawarcie małżeństwa”) najbardziej przez siebie preferowanemu przedstawicielowi drugiej grupy. Jeśli w grupie otrzymującej oferty każdy gracz ma co najwyżej jedną ofertę, to gracze są łączeni w pary w sposób wynikający ze złożonych ofert i algorytm się kończy. W przeciwnym razie gracze, którzy uzyskali więcej niż jedną ofertę, wybierają tę, którą uważają za najbardziej preferowaną i odrzucają pozostałe – ich zgoda na takie przyporządkowanie ma jednak wyłącznie charakter tymczasowy i może być w dalszej części gry odrzucona, jeśli gracz uzyska ofertę korzystniejszą. Następnie w rundzie drugiej wszyscy gracze z grupy proponującej połączenia, których oferty zostały odrzucone, składają oferty kolejnej osobie na swojej liście preferencji i, podobnie jak w rundzie pierwszej, każdy gracz z grupy otrzymującej oferty wybiera ofertę najkorzystniejszą dla siebie (jeśli ma ich więcej niż jedną), przy czym wybór odbywa się spośród wszystkich ofert otrzymanych w bieżącej rundzie oraz tymczasowo zaakceptowanych w rundzie poprzedniej. Próby powtarzane są tak długo, aż żaden gracz z grupy składającej oferty nie chce złożyć już nikomu więcej oferty (albo dlatego, że został już przyporządkowany do kogoś, kto zaakceptował jego ofertę, albo dlatego, że złożył ofertę wszystkim graczom, z którymi wolałby się połączyć niż pozostać bez przyporządkowania do nikogo, i wszystkie oferty zostały odrzucone).

Przyjrzyjmy się działaniu algorytmu Gale'a-Shapleya na przykładzie.

Rozważmy dwie czteroosobowe grupy: $K = \{K1, K2, K3, K4\}$ oraz $M = \{M1, M2, M3, M4\}$ o następujących preferencjach:

$K1$:	$M1 > M2 > M3 > M4$	$M1$:	$K4 > K3 > K2 > K1$
$K2$:	$M1 > M3 > M2 > M4$	$M2$:	$K4 > K1 > K3 > K2$
$K3$:	$M1 > M2 > M4 > M3$	$M3$:	$K1 > K2 > K4 > K3$
$K4$:	$M3 > M4 > M2 > M1$	$M4$:	$K2 > K1 > K4 > K3$

Przyjmijmy, że grupą proponującą łączenie się par jest grupa K. Zastosowanie algorytmu przebiegać będzie następująco.

W rundzie pierwszej $K1$, $K2$ oraz $K3$ składają ofertę graczowi $M1$, który jest najbardziej preferowany przez wszystkich trzech graczy, $K4$ składa natomiast ofertę graczo-

„Ekonomista” 2013, nr 2
http://www.ekonomista.info.pl

wi *M*3. Ponieważ *M*1 otrzymał więcej niż jedną ofertę, wybiera z nich najkorzystniejszą w swojej ocenie, czyli *K*3. Oznacza to, że oferty graczy *K*1 oraz *K*2 zostają odrzucone.

W rundzie drugiej *K*1 oraz *K*2, których oferty zostały odrzucone, składają ofertę kolejnym osobom na swojej liście preferencji: *K*1 proponuje połączenie *M*2, a *K*2 proponuje to *M*3. Oznacza to, że gracz *M*3 ma dwie oferty – wstępnie zaakceptowaną w rundzie pierwszej ofertę od *K*4 oraz uzyskaną w rundzie drugiej ofertę od *K*2. Wybiera on z nich preferowaną ofertę od *K*2, odrzucając zaakceptowaną wstępnie w rundzie pierwszej ofertę od *K*4 i pozostawiając tym samym *K*4 bez przyporządkowania.

W rundzie trzeciej K4, który pozostał bez przyporządkowania, oferuje połączenie kolejnemu na swojej liście graczowi *M*4. W tej chwili każdy z graczy ze zbioru *M* ma tylko jedną ofertę i poszukiwanie się kończy.

Ostatecznie przyporządkowanie uzyskane przy zastosowaniu opisanej procedury łączy graczy w cztery pary: (*K*1, *M*2), (*K*2, *M*3), (*K*3, *M*1) oraz (*K*4, *M*4).

Główny wynik Gale’a i Shapleya polega na wykazaniu, że zastosowanie tego algorytmu da zawsze dopasowanie stabilne w sensie następującym: nie można znaleźć żadnej takiej pary (M_i, K_j), nazywanej parą blokującą, M_i ze zbioru *M* i K_j ze zbioru *K*, że M_i woli K_j od gracza, do którego został przyporządkowany przez zastosowanie algorytmu Gale’a-Shapleya i równocześnie K_j woli M_i od swojego obecnego partnera. Oznacza to, że zastosowanie opisanego algorytmu da zawsze dopasowanie, w którym nikt nie będzie w stanie znaleźć dopasowania indywidualnie korzystniejszego. Nie znaczy to oczywiście, że każdy jest przyporządkowany do gracza, którego najbardziej preferuje; taka sytuacja zwykle będzie zresztą niemożliwa do osiągnięcia. W powyższym przykładzie *K*1 został przyporządkowany do gracza *M*2, chociaż uważa gracza *M*1 za lepszego. Para taka (*K*1, *M*1) nie jest jednak parą blokującą, gdyż co prawda *K*1 wolałby zostać przypisany do *M*1, ale *M*1 woli swoje obecne przyporządkowanie, czyli *K*3, od *K*1. Rzeczywiście łatwo sprawdzić, że nie można dla tego przykładu znaleźć żadnej pary blokującej.

Ze względu na fakt, że algorytm zawsze zakończy się jakimś dopasowaniem, wykazanie przez Gale’a i Shapleya, że uzyskane dopasowanie musi być stabilne, oznacza, że dla każdego układu preferencji istnieje stabilne dopasowanie.

Wybór grupy, która składa oferty jest jednak zupełnie arbitralny. Możemy zatem rozważyć zastosowanie algorytmu, w którym połączenia proponować będą członkowie grupy *M*, a nie grupy *K*. Okazuje się, że w ogólnym przypadku nie musi to prowadzić do tego samego uporządkowania. W rozważanym przykładzie dopasowaniem uzyskanym w ten sposób byłoby: (*K*1, *M*3), (*K*2, *M*4), (*K*3, *M*1) oraz (*K*4, *M*2).

Porównując ze sobą te dwa dopasowania uzyskane powyżej zauważyć można, że dopasowanie, w którym grupą proponującą był zbiór *K* jest co najmniej równie dobre dla każdego członka grupy *K* jak dopasowanie, w którym propozycje były inicjowane przez zbiór *M*. Rzeczywiście – *K*1 woli *M*2 od *M*3, *K*2 woli *M*3 od *M*4, a *K*3 woli *M*3 od *M*2. Gracz *K*3 natomiast został przyporządkowany do tego samego gracza *M*1 w obu przypadkach, jest zatem obojętny pomiędzy oboma dopasowaniami. Podobnie jest w drugim przypadku – jeśli to gracze ze zbioru *M* składają oferty, to uzyskane dopasowanie będzie dla każdego z nich co najmniej tak samo dobre jak dopasowanie uzyskane przy propozycjach składanych przez stronę przeciwną. Oba te dopasowania są oczywiście stabilne. Sytuacja taka nie jest przypadkowa. Gale i Shapley pokazują, że uzyskane dopasowanie będzie dla każdego członka grupy składającej oferty nie tylko co najmniej tak samo dobre jak dopasowanie uzyskane, kiedy połączenia proponuje grupa przeciwna, ale również że nie można znaleźć żadnego innego stabilnego dopasowania, w którym którykolwiek gracz z grupy proponującej uzyskałby przyporządkowanie ściśle dla siebie korzystniejsze. Zachodzi również zależność w przeciwną stronę – stabilne dopasowanie, w którym oferty składają gracze ze zbioru M jest nie tylko najkorzystniejsze spośród wszystkich stabilnych dopasowań dla wszystkich graczy M, ale jest równocześnie ze wszystkich stabilnych dopasowań najmniej korzystne dla wszystkich graczy ze zbioru K.

Zauważmy wreszcie, że algorytm Gale'a-Shapleya pozwala na znalezienie dwóch – potencjalnie różnych – dopasowań w zależności od tego, która grupa składa oferty, ale dla zadanego układu preferencji mogą istnieć również stabilne dopasowania, których algorytm Gale'a-Shapleya nie wykryje. Ze względu na fakt uprzywilejowania grupy składającej oferty wyznaczenie takich stabilnych dopasowań może być pożądane, aby nie faworyzować żadnej z grup. Zastosowanie algorytmu Gale'a-Shapleya pozwala jednak stosunkowo łatwo sprawdzić, czy takie alternatywne stabilne dopasowania istnieją. W powyższym przykładzie widać, że $K3$ musi zostać w każdym stabilnym dopasowaniu przypisany do $M1$, skoro w obu przypadkach w taki właśnie sposób przyporządkował tych graczy algorytm Gale'a-Shapleya: skoro $M1$ jest dla $K3$ spośród wszystkich stabilnych dopasowań równocześnie najlepszym i najgorszym wyborem, musi to znaczyć, że każde stabilne dopasowanie musi tych dwóch graczy przyporządkowywać do siebie. Łatwo sprawdzić, że w powyższym przykładzie żadne inne stabilne dopasowanie nie będzie istnieć bez konieczności analizowania stabilności każdego z 24 możliwych przypadków.

Nie zawsze tak jednak będzie. Jeśli preferencje graczy układają się w sposób następujący:

$K1$: $M1 > M2 > M3$	$M1$: $K2 > K3 > K1$,
$K2$: $M2 > M3 > M1$	$M2$: $K3 > K1 > K2$,
$K3$: $M3 > M1 > M2$	$M3$: $K1 > K2 > K3$,

to jednym z możliwych stabilnych dopasowań będzie: ($K1, M2$), ($K2, M3$), ($K3, M1$), gdzie każdy przyporządkowany jest do drugiego na swojej liście gracza. Algorytm Gale'a-Shapleya nie poda tego rozwiązania ani w sytuacji, gdy grupą proponującą jest K, ani gdy jest nią M. Zauważmy również, że dopasowanie to ma taką własność, iż można znaleźć stabilne dopasowanie takie, że ścisłej poprawie ulegnie sytuacja każdego gracza jednej z grup (kosztem drugiej grupy) – np. dopasowanie ($K1, M1$), ($K2, M2$), ($K3, M3$) jest również stabilne i preferowane ściśle przez wszystkich graczy ze zbioru K. Można pokazać, że w przypadku dopasowań wyznaczonych za pomocą algorytmu Gale'a-Shapleya taka sytuacja dla grupy proponującej zdarzyć się nie może – nie tylko nie da się znaleźć stabilnego rozwiązania poprawiającego sytuację każdego proponującego (co jest oczywiste, skoro zastosowanie algorytmu daje stabilne rozwiązanie optymalne z punktu widzenia grupy proponującej), ale nie istnieją również niestabilne dopasowania, w których sytuacja każdego proponującego uległaby poprawie.

7. Manipulowalność

Chociaż Gale i Shapley wykazują, że przy danych preferencjach zastosowanie opisanego przez nich algorytmu da rozwiązanie, w którym nie będzie istniała żadna para blokująca, a zatem jest ono stabilne w tym sensie, że jeśli zostało wprowadzone, to nie ulegnie rozpadowi (o ile nie zmienią się indywidualne preferencje), to jednak można zadać pytanie o możliwość manipulowania wynikiem gry (manipulowalność). Ponieważ w praktycznych zastosowaniach preferencje graczy nie są znane i mogą zostać ustalone wyłącznie na podstawie tego, co gracze twierdzą o swoich preferencjach, można postawić pytanie, czy zgłoszenie przez wszystkich graczy ich prawdziwych preferencji tworzy równowagę Nasha, a zatem czy rzeczywiście nikt nie będzie miał bodźca do tego, aby fałszywie podawać swoje preferencje przy założeniu, że inni gracze ujawniają w sposób szczery swoje preferencje. Okazuje się, że tak nie jest i przy pewnych układach preferencji może się zdarzyć, że będą istnieli gracze, którzy mogą skorzystać na takim właśnie zafałszowaniu swojego optymalnego porządku. W rozpatrywanym powyżej przykładzie przyjrzyjmy się np., jak zadziałałby algorytm, gdyby gracz $K4$ fałszywie przedstawił swoje uporządkowanie jako $M3 > M4 > M1 > M2$. Łatwo sprawdzić, że w sytuacji, w której to gracze ze zbioru M składają oferty, zmiana taka zakończyłaby się na dopasowaniu ($K1$, $M2$), ($K2$, $M3$), ($K3$, $M1$) oraz ($K4$, $M4$), które jest korzystniejsze dla gracza $K4$ dokonującego takiej manipulacji. Algorytm Gale'a-Shapleya nie zabezpiecza zatem przed manipulowaniem ze strony graczy. Okazuje się jednak, że przynajmniej częściowo brak manipulacji da się zagwarantować. Roth (1982, 1984a) pokazuje, że w przypadku stosowania omawianego algorytmu żadnemu członkowi grupy składającej oferty nie będzie opłacało się dokonać tego typu fałszywej prezentacji preferencji; potencjalna manipulacja wynikiem jest zatem ograniczona do grupy przyjmującej oferty. Co więcej, Roth pokazuje również, że nie można skonstruować algorytmu, który zapewniałby brak manipulacji ze strony wszystkich uczestników gry.

Gale i Shapley zwracają również uwagę na to, że jednym z kluczowych założeń pozwalających uzyskać stabilność rozwiązania, jest założenie o rozłączności zbiorów K i M. W ogólnym przypadku można oczywiście rozważać sytuację, w której w pary połączyć trzeba elementy pewnego wspólnego zbioru, w którym każdy gracz ma określone preferencje wobec pozostałych – problem taki nazywa się w literaturze problemem współlokatora. Okazuje się jednak, że w takiej sytuacji może nie istnieć żadne stabilne rozwiązanie. Na przykład jeśli preferencje graczy kształtują się następująco:

A: $B > C > D$,
B: $C > A > D$,
C: $A > B > D$,
D: dowolne,

to żadne dopasowanie nie będzie stabilne. Ktokolwiek zostałby bowiem przyporządkowany do gracza D, będzie uważał to za najgorszą możliwą dla siebie opcję i będzie wolał stworzyć parę z którymkolwiek z pozostałych dwóch graczy, a przy powyższym układzie preferencji zawsze znajdzie się gracz, który będzie go uważał za partnera najbardziej preferowanego. Na przykład, dla dopasowania (A, B), (C, D) parą blokującą będzie para B, C, bo B uważa C za najbardziej atrakcyjnego, a C uważa B za wybór bardziej pożądany niż jego obecne przyporządkowanie do gracza D.

8. Krajowy Program Rozmieszczenia Stażystów

Aczkolwiek Gale i Shapley nazywają rozpatrywane przez siebie zagadnienie problemem poszukiwania stabilnych małżeństw, zaproponowany przez nich algorytm ma bardziej praktyczne zastosowania w innych obszarach. Samo kojarzenie ludzi w pary w rzeczywistym świecie przebiega zresztą w zupełnie inny sposób, nie istnieje bowiem centralny mechanizm, który na podstawie zgłaszanych przez zainteresowanych preferencji określałby, kto z kim powinien się związać. Warto jednak zauważyć, że nawet jeśli w tego typu zagadnieniach algorytm Gale'a-Shapleya nie jest faktycznie stosowany, czy nawet jeśli jego stosowanie byłoby zupełnie niepraktyczne, to ważnym wkładem jego twórców jest wykazanie, że przy pewnych założeniach dotyczących preferencji poszczególnych osób istnieje co najmniej jedno dopasowanie stabilne i przynajmniej teoretycznie można je w takim razie wyznaczyć.

W praktyce istnieją jednak problemy, w których potrzeba połączyć w pary elementy z różnych grup i stworzenie centralnego – niekoniecznie obowiązkowego dla uczestników – mechanizmu pozwalającego na takie połączenie jest rzeczywiście stosowane. Jednym z takich przypadków, w których szczególnie silnie zaznaczył się wkład Rotha jest istniejący w Stanach Zjednoczonych Krajowy Program Rozmieszczenia Stażystów (National Residence Matching Program – NRMP), czyli alokacji na staże absolwentów uczelni medycznych odpowiadające specjalizacji w polskim systemie szkolnictwa. Absolwenci amerykańskich uczelni medycznych po zakończeniu studiów muszą odbyć staż związany z uzyskaniem specjalizacji. Mamy zatem do czynienia z problemem teoretycznie rozważanym przez Gale'a-Shapleya: istnieją dwie rozłączne grupy (szpitale i lekarze) o preferencjach nawzajem względem siebie określonych, które trzeba połączyć w pary (przypisać stażystę do danego szpitala). Pierwotnie system ten funkcjonował w sposób zdecentralizowany – uczelnie same poszukiwały najkorzystniejszych ze swojego punktu widzenia kandydatów wśród studentów uczelni medycznych. System taki zaczął jednak wykazywać pewne niepożądane cechy. Aby zapewnić sobie jak najlepszych studentów, szpitale zaczęły składać oferty studentom coraz wcześniejszych lat, zmuszając ich w efekcie do decydowania o specjalizacji często na etapie, kiedy dany student nie wiedział jeszcze, czym chce się zajmować. Zwlekanie z przyjęciem oferty groziło natomiast tym, że dana osoba w ogóle nie znajdzie korzystnego miejsca na staż, gdyż do czasu, kiedy się zdecyduje wszystkie atrakcyjne miejsca będą już zajęte. Również dla szpitali taki system nie był korzystny, wymuszał bowiem składanie ofert na etapie, w którym nie było jeszcze często możliwe ustalenie jakości potencjalnego stażysty. Jako remedium wprowadzono w latach 50. centralny system zbierający informacje o preferencjach obu grup i łączący stażystów ze szpitalami. Pomimo że system ten działał na zasadzie dobrowolności, zaczął się on cieszyć sporą popularnością i praktycznie wszystkie staże były przydzielane przy jego pomocy. Roth (1984b) ustalił, że stosowany przez ten system algorytm dopasowania pokrywał się w dużej mierze z algorytmem Gale'a-Shapleya i jego sukces wynikał głównie właśnie z faktu, że był on w stanie dopasować uczestników w opisywanej sytuacji w sposób stabilny – w przeciwnym razie uczestnicy nie byliby nim zainteresowani i szukaliby lepszych dopasowań poza systemem.

Roth zasłużył się nie tylko wykazaniem, że stosowany przez NRMP algorytm daje rozwiązania stabilne, ale również jego dostosowaniem do zmieniającej się struktury rynkowej. Zmiany społeczne lat 60. spowodowały, że coraz więcej kobiet decydowało się na podjęcie pracy zawodowej, a w efekcie studia medyczne kończyło coraz więcej małżeństw, których preferencje były w oczywisty sposób powiązane – pary takie mogły być skłonne zrezygnować z podjęcia pracy w najbardziej przez siebie preferowanych szpitalach, jeśli miałoby to oznaczać konieczność zamieszkania w oddalonych od siebie miastach. Algorytm Gale'a-Shapleya nie dopuszczał oczywiście tego typu korelacji w preferencjach uczestników. Roth wykazał, że w sytuacji, kiedy na rynku pojawiają się tego typu pary, może się okazać, że żadne stabilne rozwiązanie nie istnieje.

Drugim ważnym problemem poruszonym przez Rotha był fakt, że stosowany przez NRMP algorytm był algorytmem, w którym oferty były składane przez szpitale, generował zatem – jak wykazali Gale i Shapley – dopasowanie stabilne, które jest najkorzystniejsze dla szpitali i najmniej korzystne dla lekarzy. Zarząd programu zatrudnił w 1995 r. Rotha do zaprojektowania sposobu kojarzenia lekarzy ze szpitalami, który pozwoliłby uporać się z tymi dwoma problemami. Roth i Peranson (1999) opisują zaproponowany system, w którym co prawda ze względu na obecność par nie ma gwarancji uzyskania rozwiązania stabilnego, ale minimalizuje się problemy związane z ich obecnością w sposób sekwencyjny. Symulacje przeprowadzone przez Rotha (2002) wykazały również, że uzyskanie przez manipulację korzystniejszego dla siebie wyniku jest w zmodyfikowanym przez niego systemie praktycznie niemożliwe.

9. Rekrutacja studentów

Innym przykładem praktycznego zastosowania omawianego algorytmu, na który zwrócili uwagę już Gale i Shapley w swoim oryginalnym artykule, jest przyporządkowanie kandydatów na studia do uczelni – również mamy tu dwa rozłączne zbiory o wzajemnie określonych preferencjach: uczelnie mają jakąś ocenę, których kandydatów wolą i podobnie kandydaci porządkują w określony sposób uczelnie, w których chcieliby studiować. Ze względu jednak na fakt, że w przypadku kojarzenia kandydatów z uczelniami mamy do czynienia z problemem przyporządkowania każdej uczelni wieloelementowego zbioru potencjalnych kandydatów, zagadnienie to nie jest prostym uogólnieniem rozwiązania Gale'a i Shapleya – preferencje uczestników takiego procesu muszą zostać dużo precyzyjniej określone, a samo zastosowanie algorytmu Gale'a-Shapleya co prawda pozwala znaleźć rozwiązanie stabilne, ale – jak pokazuje Roth – nie będzie ono spełniało pewnych właściwości występujących w przypadku dopasowań typu „jeden do jednego".

W przypadku dopasowań typu „wiele do jednego" problem, przed którym staje badacz zajmujący się badaniem właściwości algorytmu, związany jest z faktem, że preferencje graczy są określone na poszczególnych elementach przeciwnego zbioru (np. uczelnie mają pewną ocenę tego, którego kandydata uważają za lepszego – tworzą listy rankingowe na podstawie ustalonych przez siebie kryteriów, w Polsce zwykle jako pewną średnią ważoną uzyskanych przez kandydata ocen na maturze), jednak ze względu na fakt, że do jednej uczelni może trafić wielu kandydatów, preferencje uczelni powinny być faktycznie określone na zbiorach, z którymi uczelnia ma rzeczywiście do czynienia, a więc na wszystkich możliwych podzbiorach zbioru kandydatów. Bez poczynienia dodatkowych założeń dotyczących tego, jak takie preferencje się kształtują, nawet wiedząc, że uczelnia porządkuje kandydatów np. w kolejności $K1 > K2 > K3 > K4$, nie tylko nie można określić, czy będzie ona uważała za lepszą parę $(K1, K4)$ od pary $(K2, K3)$, ale również nie będzie można określić, czy za lepszą uważa ona intuicyjnie bardziej oczywistą do porównania parę $(K1, K2)$ od pary $(K3, K4)$, gdyż formalnie jej preferencje nie są w ogóle na takich dwuelementowych zbiorach określone. W praktyce przy badaniu właściwości dopasowań czynione są w związku z tym dodatkowe założenia, z których typowym założeniem jest założenie o responsywności preferencji. Preferencje są responsywne, jeśli dla każdych dwóch elementów x, y i dla każdego zbioru S takiego, że $\{x, y\} \nsubseteq S$, gracz uważa $S \cup \{x\}$ za lepsze od $S \cup \{y\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy uważa x za lepsze od y, natomiast uważa $S \cup \{x\}$ za lepsze od S wtedy i tylko wtedy, gdy uważa x za lepsze od ϕ (czyli w naszym przypadku – gdy woli danego studenta przyjąć niż nie przyjąć).

Podobnie jak w przypadku badania rynku lekarzy, Roth pokazuje zarówno pewne ważne własności algorytmu dopasowania w przypadku rekrutacji studentów, jak i pomaga przy konstruowaniu odpowiednich mechanizmów selekcji.

Roth (1985) formalnie wykazuje, że przy założeniu responsywności preferencji zastosowanie algorytmu Gale'a-Shapleya daje dopasowanie o podobnych właściwościach. Udaje się w ten sposób uzyskać rozwiązanie stabilne, które jest najkorzystniejsze dla strony składającej propozycje, przy czym może ono być manipulowane przez graczy otrzymujących oferty, oraz nie można skonstruować algorytmu, który zawsze by prowadził do dopasowania niemanipulowalnego. Można również zauważyć, że jeśli preferencje uczelni rzeczywiście kształtowane są na podstawie niezależnych od nich wyników egzaminów, to trudno jest mówić o manipulowaniu algorytmem po stronie uczelni – uczelnia przedstawia, zwykle z dużym wyprzedzeniem, swoje kryteria oceny i nie może arbitralnie dokonać zafałszowania preferencji przez przesunięcie studenta na liście rankingowej bez narażania się na konsekwencje prawne. Roth pokazuje jednak, że w przypadku modelu rekrutacji na studia nie wszystkie własności algorytmu dopasowania typu „jeden do jednego" zostają zachowane. W szczególności – inaczej niż w modelu małżeństwa – może się zdarzyć, że będą istniały inne, aczkolwiek niestabilne dopasowania, które będą korzystniejsze dla wszystkich proponujących.

Rozważmy np. następującą sytuację:

$U1$: $K1 > K2 > K3 > K4$,
$U2$: $K1 > K2 > K3 > K4$,
$U3$: $K3 > K1 > K2 > K4$,
$K1$: $U3 > U1 > U2$,
$K2$: $U2 > U1 > U3$,
$K3$: $U1 > U3 > U2$,
$K4$: $U1 > U2 > U3$,

i przyjmijmy, że limit przyjęć wynosi 2 dla uczelni $U1$ oraz po 1 dla uczelni $U2$ i $U3$. W sytuacji, w której oferty są składane przez uczelnie, zastosowanie algorytmu Gale'a-Shapleya da dopasowanie, w którym do uczelni $U1$ przyporządkowani zostają kandydaci $K3$ i $K4$, do uczelni $U2$ kandydat $K2$ oraz do uczelni $U3$ kandydat $K1$. Istnieje jednak inne możliwe dopasowanie, w którym do $U1$ trafią kandydaci $K2$ i $K4$, do uczelni $U2$ kandydat $K1$, a do uczelni $U3$ kandydat $K3$ – i takie dopasowanie będzie przy założeniu responsywności preferencji ściśle preferowane przez każdą uczelnię. Dopasowanie takie nie będzie jednak stabilne. W sytuacji gdy uczelnie składają oferty, algorytm Gale'a Shapleya nadal daje dopasowanie optymalne z punktu widzenia uczelni. Istnieje jednak para blokująca ($K3$, $U1$) – kandydat $K3$ wolałby studiować w uczelni $U1$ niż w $U3$, do której został przypisany, a uczelnia $U1$ wolałaby równocześnie kandydata $K3$ od kandydata $K4$, który do niej trafił.

Roth nie tylko badał teoretyczne właściwości algorytmu dopasowania, ale podobnie jak w przypadku rynku stażystów medycznych pomógł zaprojektować efektywne w praktyce mechanizmy rekrutacyjne oparte na tym algorytmie. W roku 2005 opracował on ze współpracownikami dla szkół publicznych w Bostonie nowy system, który zastąpił poprzedni system rekrutacji, w którym w pierwszej kolejności dopasowywano kandydatów do szkół znajdujących się na pierwszych miejscach na ich listach preferencji, a następnie dopiero w dalszej kolejności i w miarę wolnych miejsc wykorzystywano dalsze miejsca. Stary system stwarzał oczywiście ogromne problemy natury strategicznej polegające na tym, że kandydat musiał decydować, czy woli aplikować do lepszej, ale bardziej obleganej szkoły i w razie odrzucenia ryzykować, że nie znajdzie nigdzie dobrego miejsca, czy bezpieczniej będzie umieścić na pierwszym miejscu szkołę mniej preferowaną. Roth i jego współpracowncy zaproponowali system oparty na ofertach kandydatów, eliminując tym samym potrzebę strategicznych manipulacji i ulepszając stabilność systemu. Również w 2003 r. w Nowym Jorku przyjęty został opracowany przez Rotha system rekrutacyjny wykorzystujący mechanizm odroczonej akceptacji Gale'a-Shapleya.

10. Rynek dopasowań z płacami

Ważnym uogólnieniem przedstawionego przez Gale'a i Shapleya algorytmu dopasowań jest zaproponowany przez Shapleya i Shubika (1971) model dopuszczający możliwość dokonywania transferów pieniężnych wpływających na użyteczność uczestników wymiany. Shapley i Shubik rozważają model dopasowania typu „jeden do jednego" (odpowiadający modelowi małżeństwa Gale'a i Shapleya), zakładając jednak, że strony mają możliwość zaproponowania pensji, która w quasiliniowy sposób będzie wpływała na użyteczność graczy. Przy tym założeniu wykazują oni, że rdzeń takiej gry jest niepusty, a zatem również przyjęcie bardziej realistycznego na typowym rynku założenia, że preferencje wiążą się z uzyskanym wynagrodzeniem, pozwala znaleźć stabilne rozwiązanie. Dopasowanie uzyskiwane w takim modelu okazuje się – przy pewnych założeniach dotyczących preferencji – jednoznacznie określone; rozwiązania różnią się wyłącznie płacami. Podobnie jak w modelu Gale'a i Shapleya, można znaleźć najkorzystniejszą sytuację dla jednej i drugiej z kojarzonych ze sobą grup, przy czym płace charakteryzujące obie te sytuacje wyznaczać będą granice, przy których jest osiągana równowaga rynkowa. Shapley i Shubik nie proponują algorytmu takiego stabilnego dopasowania. Algorytm taki, działający analogicznie do algorytmu odroczonej akceptacji Gale'a i Shapleya, został natomiast opisany przez Crawforda i Knoer (1981).

Zagadnieniami dotyczącymi modeli dopasowań w sytuacji, w której poszukiwanie optymalnego partnera wiąże się z dodatkowymi kosztami (na rynku ustalenie, z kim najlepiej byłoby dokonać wymiany, może być trudne i kosztowne) zajmowali się również laureaci Nagrody Nobla z 2010 r.: Diamond, Pissarides i Mortensen. Rozwinięty przez nich w serii artykułów (Diamond (1981), Mortensen (1982), Pissarides (1979), Mortensen i Pissarides (1994)) model stał się podstawą makroenomicznej analizy rynku pracy[1]. W modelu tym również mamy do czynienia z dwiema rozłącznymi grupami, pracownikami i pracodawcami, przy czym część pracowników jest zatrudniona, a część bezrobotna. Pracownicy posiadający pracę mogą ją jednak stracić i zostać zmuszeni do poszukiwania zatrudnienia. Kojarzenie firm z pracownikami odbywa się podczas dwustronnych spotkań, w których w pewnym modelu przetargowym o parametrach opisujących względną siłę przetargową obu stron, ustalane są warunki zatrudnienia, w tym wysokość płacy. Poszukiwanie optymalnego dopasowania – inaczej niż u Gale'a i Shapleya, gdzie preferencje są znane i dopasowanie następuje za pomocą centralnego mechanizmu, odbywa się w dynamicznym procesie poszukiwania najlepszej oferty przez uczestników rynku, który wymaga zarówno czasu, jak i poniesienia odpowiednich kosztów. Same preferencje mogą być również zmienne w czasie – wartość danego pracownika może nie być od razu oczywista dla pracodawcy. Diamond, Mortensen i Pissarides pokazują właściwości równowagi w takim modelu i jej zależność od przyjętych wartości parametrów.

11. Rynek z jednostronnymi preferencjami

Zarówno Shapley, jak Roth mają również ważne osiągnięcia przy badaniu algorytmu dopasowania, w którym preferencje posiada tylko jedna z analizowanych grup. Shapley i Scarf (1974) proponują rozważenie sytuacji, w której dopasować do siebie trzeba właścicieli oraz domy. Preferencje są w tej sytuacji określone wyłącznie po stronie właścicieli – każdy z nich potrafi uporządkować potencjalne domy od najbardziej do najmniej preferowanego, domy natomiast nie mają preferencji. Aby umożliwić rozwiązanie problemu, potrzebne jest określenie *status quo* w postaci wyjściowego przypisania każdego domu do właściciela. Shapley i Scarf stawiają pytanie o to, czy dla danego wyjściowego przyporządkowania i zadanych preferencji można znaleźć dopasowanie, które by było w sensie paretowskim lepsze dla właścicieli, oraz przedstawiają algorytm wyznaczenia takiego rozwiązania.

[1] Dorobek naukowy tych autorów przybliżają polskiemu czytelnikowi wydane przez Polskie Towarzystwo Ekonomiczne w 2012 r. przekłady książek: Ch.A. Pissaridesa *Teoria bezrobocia w stanie równowagi* i D.T. Mortensena *Dyspresja płac* oraz przygotowywane wydanie książki N. Barra i P. Diamonda *Reforma emerytur – krótki przewodnik* (*przyp. red.*).

Algorytm opisywany przez Shapleya i Scarfa, nazwany cyklem wymiany najbardziej preferowanych elementów, działa w sposób następujący. Każdy dom identyfikowany jest z jego aktualnym właścicielem, co oznacza, że preferencje określone przez właścicieli na poszczególnych domach można *de facto* utożsamić z preferencjami dotyczącymi poszczególnych domów. Następnie bada się, czy w tak określonych preferencjach występuje cykl, biorąc pod uwagę wyłącznie elementy najbardziej preferowane przez każdego z właścicieli. Jeśli taki cykl nie występuje, to znaczy, że danej sytuacji nie można w sensie Pareto ulepszyć. Jeśli zaś cykl występuje, to dokonuje się wymiany domów w ramach danego cyklu, po czym usuwa się domy i właścicieli, którzy brali udział w danym cyklu i powtarza procedurę dla pozostałych uczestników, aż zostaną rozwiązane wszystkie cykle.

Przyjrzyjmy się przykładowi zastosowania tego algorytmu:

Dany jest zbiór właścicieli {1, 2, 3, 4} i zbiór domów {A, B, C, D}, a początkowa alokacja wygląda następująco: 1D, 2C, 3B, 4A. Preferencje graczy określone są następująco:

1: $A > B > C > D$,
2: $B > A > D >$ C,
3: $A > B > D > C$,
4: $D > C > A > B$.

Algorytm ustala, czyj dom jest najbardziej preferowany przez każdego z graczy – gracz 1 i 3 najbardziej preferują dom A, który należy do gracza 4, gracz 2 najbardziej preferuje dom gracza 3, a gracz 4 dom gracza 1. W tak zmodyfikowanych preferencjach występuje cykl: gracz 1 chciałby dom gracza 4, a gracz 4 – dom gracza 1. Domy A i D zmieniają zatem właścicieli i są usuwane z problemu razem z graczem 1 i 4. W drugiej turze algorytmu pozostają tylko gracz 2 i 3 i posiadane przez nich domy B i C:

2: $B >$ C,
3: $B >$ C.

Obaj gracze wolą dom gracza 3 (B), nie ma zatem cyklu, w ramach którego mogłoby dojść do wymiany i algorytm się kończy.

Roth i Postlewaite (1977) pokazali, że dla każdego wyjściowego przyporządkowania domów do właścicieli i dla każdych ostrych preferencji da się znaleźć jednoznaczne ostateczne dopasowanie z wykorzystaniem powyższego algorytmu (a więc, w szczególności, kolejność eliminacji cykli nie ma znaczenia dla rozwiązania) oraz że rozwiązanie uzyskane w taki sposób znajduje się w rdzeniu opisanej gry. Roth (1982) wykazał również, że zastosowanie tak opisanego mechanizmu jest odporne na manipulację.

Ważnym wkładem Rotha jest zaobserwowanie, że podobną strukturę ma wymiana organów do transplantacji, w szczególności wymiana nerek. Ze względów etycznych jest to obszar, który nie podlega swobodnej wymianie rynkowej – otwarcie rynku na nerki mogłoby prowadzić do patologii, w których ludzie pozbawiają się swoich organów z narażeniem swojego zdrowia lub życia. Poza szczególnymi sytuacjami, w których nerka może pochodzić od osoby obcej, system zwykle działa w taki sposób, że dawcą powinna być osoba bliska. Rodzi to oczywisty problem polegający na tym, że ze względów medycznych potencjalny dawca może nie być kompatybilny (np. ze względu na złą grupę krwi) z biorcą, któremu może oddać nerkę. Roth zauważa, że tak opisany problem jest pod wieloma względami analogiczny do opisanego przez Shapleya i Scarfa modelu wymiany domów – każdy z uczestników problemu dysponuje zdrową nerką od potencjalnego dawcy i ma określone wynikające ze względów medycznych preferencje co do pozostałych organów znajdujących się w systemie. Istotna różnica polega na tym, że o ile w teoretycznym modelu wymiany domów wymiana mogła nastąpić w sposób równoczesny, o tyle w przypadku wymiany nerek może się zdarzyć, że pacjent trafi na listę oczekujących, jeśli nie ma żadnej nerki, którą można by mu przypisać. Roth, Sönmez and Ünver (2004) proponują system oparty na cyklu wymiany najbardziej preferowanych elementów, uwzględniający konieczność tworzenia listy oczekujących i zapewniający efektywny i odporny na manipulację mechanizm wymiany. Na podstawie zaproponowanego przez Rotha algorytmu możliwe jest przeprowadzanie przeszczepów ratujących życie, w tym również wyszukiwanie długich cykli wymiany. W kwietniu 2008 r. przeprowadzono w USA operację, w którą zaangażowanych było sześć par dawców i biorców.

Zakończenie

Obaj laureaci tegorocznej Nagrody Nobla z ekonomii mają ważne osiągnięcia w rozwoju teorii ekonomii. O ile osiągnięcia Shapleya dotyczą głównie teoretycznych aspektów kooperacyjnej teorii gier, o tyle Roth jest zaangażowany głównie w zagadnienia praktyczne, zastosowania teoretycznych rozwiązań w rzeczywistych sytuacjach, projektowanie rozwiązań rynkowych, ekonomię eksperymentalną. Komitet przyznający nagrodę podkreślił, że nagroda przyznana została za dokonania tworzące pewną całość – od zaproponowania i zaprojektowania algorytmu, przez zbadanie jego teoretycznych właściwości, po praktyczne zastosowania z niezbędnymi modyfikacjami, tam gdzie były one konieczne do rozwiązania rzeczywistych problemów społecznych. I co prawda nie są to zagadnienia pozwalające rozwiązać poważne makroekonomiczne problemy, takie jak obecny kryzys finansowy, ale są one niewątpliwie dla wielu ludzi zagadnieniami niezwykle ważnymi, w tym również – jak w problemie wymiany nerek – ratującymi ludzkie życie.

Tekst wpłynął 25 grudnia 2012 r.

Bibliografia

Abdulkadiroglu A., Pathak P.A., Roth A.E., *The New York City High School Match*, „American Economic Review" 2005, nr 95.

Abdulkadiroglu A., Pathak P.A., Roth A.E., Sönmez T., *The Boston Public School Match*, „American Economic Review" 2005, nr 95.

Bondareva O., *Nekotoryje primenenija metodow liniejnogo programmirowanija k tieorii kooperatiwnych igr*, „Problemy Kibernetiki" 1963, nr 10.

Crawford V.P., Knoe E.M., *Job Matching with Heterogeneous Firms and Workers*, „Econometrica" 1981, nr 49(2).

Diamond P., *Mobility Costs, Frictional Unemployment, and Efficiency*, „Journal of Political Economy" 1981, nr 89.

Fischer D., Schotter A., *The Inevitability of the "Paradox of Redistribution" in the Allocation of Voting Weights*, „Public Choice" 1978, nr 33(2).

Gale D., Shapley L.S., *College Admissions and the Stability of Marriage*, „American Mathematical Monthly" 1962, nr 69.

Mortensen D., *Property Rights and Effciency in Mating, Racing and Related Games,* „American Economic Review" 1982, nr 72.

Mortensen D., Pissarides C., *Job Creation and Job Destruction in the Theory of Unemployment*, „Review of Economic Studies" 1994, nr 61.

Nash J., Equilibrium *Points in n-Person Games*, „Proceedings of the National Academy of Sciences" 1950, nr 36(1).

Nash J., *Non-cooperative Games*, „Annals of Mathematics" 1951, t. 54, nr 2.

Pissarides C., *Job Matching with State Employment Agencies and Random Search*, „Economic Journal” 1979, nr 89.
Roth A.E., *Incentive Compatibility in a Market with Indivisibilities*, „Economics Letters” 1982, nr 9.
Roth A.E., *Misrepresentation and Stability in the Marriage Problem*, „Journal of Economic Theory” 1984a, nr 34.
Roth A.E., *The Evolution of the Labor Market for Medical Interns and Residents: A Case Study in Game Theory*, „Journal of Political Economy” 1984b, nr 92.
Roth A.E, *The College Admissions Problem is Not Equivalent to the Marriage Problem*, „Journal of Economic Theory” 1985, nr 36.
Roth A.E., *The Economist as Engineer: Game Theory, Experimental Economics and Computation as Tools of Design Economics*, „Econometrica” 2002, nr 70.
Roth A.E., Peranson E., *The Redesign of the Matching Market for American Physicians: Some Engineering Aspects of Economic Design*, „American Economic Review” 1999, nr 89.
Roth A.E., Postlewaite A., *Weak Versus Strong Domination in a market With Indivisible Goods*, „Journal of Mathematical Economics” 1977, nr 4.
Roth A.E., Sönmez T., Ünver M.U., *Kidney Exchange,* „Quarterly Journal of Economics” 2004, nr 19.
Shapley L.S., *A Value for n-Person Games*, w: *Contributions to the Theory of Games*, t. 2, red. H.W. Kuhn, A.W. Tucker, Princeton University Press, Princeton 1953.
Shapley L.S., *On Balanced Sets and Cores*, „Navel Research Logistics Quarterly” 1967, nr 9.
Shapley L.S., *Cores of Convex Games*, „International Journal of Game Theory” 1971, nr 1.
Shapley L.S., Scarf H., *On Cores and Indivisibility*, „Journal of Mathematical Economics” 1974, nr 1.
Shapley L.S., Shubik M., *A Method of Evaluating the Distribution of Power in a Committee System*, „American Political Science Review” 1954, nr 48.
Shapley L.S., Shubik M., *The Assignment Game I: The Core*, „International Journal of Game Theory” 1971, nr 1.
van Huyck J.B., Battalio R.C., Beil I.R.O., *Tacit Coordination Games, Strategic Uncertainty, and Coordination Failure*, „American Economic Review” 1990, nr 80(1).
von Neumann J., Morgenstern O., *Theory of Games and Economic Behavior*, University Press Princeton, Princeton 1944.