JULIUSZ JABŁECKI[*], RYSZARD KOKOSZCZYŃSKI[**], PAWEŁ SAKOWSKI[***], ROBERT ŚLEPACZUK[****], PIOTR WÓJCIK[*****]

Instrumenty pochodne na zmienność – nowa klasa aktywów finansowych[1]

Wstęp

W ciągu ostatnich kilkunastu lat wykształciła się nowa grupa instrumentów pochodnych, które umożliwiają inwestorom uzyskanie bezpośredniej ekspozycji na zmienność[2]. Na pierwszy rzut oka wartość dodana tych instrumentów może się wydać nieoczywista. Wszak nawet prosta opcja zawiera w sobie ekspozycję na zmienność. Jak wykazali Black i Scholes (1973) oraz równolegle Merton (1973), zmienność – czyli stopień rozproszenia stóp zwrotu danego instrumentu bazowego – jest kluczowym parametrem określającym wartość opcji, dającej prawo do zakupu (*call*) lub sprzedaży (*put*) tego instrumentu w ustalonym terminie w przyszłości. Jest to zresztą zgodne z intuicją: wartość opcji na zakup np. akcji Apple za miesiąc po ustalonej cenie jest tym większa, im większa jest zmienność cen

[*] Dr Juliusz Jabłecki – Wydział Nauk Ekonomicznych, Uniwersytet Warszawski i Instytut Ekonomiczny, Narodowy Bank Polski; e-mail: jjablecki@wne.uw.edu.pl

[**] Dr hab. Ryszard Kokoszczyński – Wydział Nauk Ekonomicznych, Uniwersytet Warszawski i Narodowy Bank Polski; e-mail: rkokoszczynski@wne.uw.edu.pl

[***] Dr Paweł Sakowski – Wydział Nauk Ekonomicznych, Uniwersytet Warszawski; e-mail: sakowski@wne.uw.edu.pl

[****] Dr Robert Ślepaczuk – Wydział Nauk Ekonomicznych, Uniwersytet Warszawski; e-mail: rslepaczuk@wne.uw.edu.pl

[*****] Dr Piotr Wójcik – Wydział Nauk Ekonomicznych, Uniwersytet Warszawski; e-mail: e-mail: pwojcik@wne.uw.edu.pl

[1] Artykuł przygotowany w ramach realizacji projektu badawczego 2011/03/B/HS4/02298 finansowanego przez NCN. Artykuł wyraża osobiste poglądy autorów, a nie instytucji, z którymi są związani.

[2] Ponieważ póki co nie przyjęła się w literaturze krajowiej nomenklatura dla instrumentów pochodnych na zmienność, dla uniknięcia sztuczności z jednej strony, a nieporozumień z drugiej, w niniejszym artykule będziemy się posługiwać naprzemiennie terminami anglojęzycznymi lub spolszczeniami, np. kontrakt *futures* na zmienność implikowaną, VIX *futures*, swap wariancji lub *variance swap*.

akcji, bo tym większa jest wówczas szansa, że w chwili wygaśnięcia opcji cena akcji będzie znacznie powyżej ustalonej ceny wykonania i posiadacz opcji zrealizuje pokaźniejszy zysk. Zasadnicze *novum* pochodnych na zmienność polega jednak na tym, że ustalona miara zmienności określa już nie tylko wartość teoretyczną instrumentu – jak ma to miejsce w przypadku opcji – ale bezpośrednio samą wielkość należnej wypłaty. Tym samym zmienność sama w sobie stała się instrumentem bazowym – nową klasą aktywów.

Taki stan rzeczy nasuwa trzy naturalne pytania. Po pierwsze, jak należy rozumieć ekspozycję na zmienność i dlaczego inwestorzy mieliby chcieć ją przyjmować? Po drugie – zakładając, że można wskazać nietrywialne ekonomiczne przesłanki ekspozycji na zmienność – w jaki sposób można tę ekspozycję uzyskać? Innymi słowy, jakie są podstawy teoretyczne konstrukcji najważniejszych instrumentów pochodnych na zmienność i jaki jest aktualny stan tego rynku? Po trzecie wreszcie, czy na podstawie dostępnych danych można stwierdzić *ex post*, że przyjęcie ekspozycji na zmienność byłoby korzystne, tzn. poprawiłoby efektywność (zmniejszyło ryzyko lub zwiększyło stopę zwrotu) standardowych portfeli inwestycyjnych? Celem niniejszego artykułu jest właśnie próba odpowiedzi na powyższe pytania.

Wydaje się, że dotychczasową literaturę na temat zmienności jako nowej klasy aktywów można – przynajmniej dla celów porządkowych – podzielić na dwa główne nurty. Pierwszy nurt, teoretyczny, dotyczy konstrukcji wskaźników zmienności oraz metod wyceny i replikacji instrumentów pochodnych na zmienność. Drugi nurt, empiryczny, koncentruje się na badaniu pożytków z uwzględnienia jakiejś formy ekspozycji na zmienność w portfelu inwestycyjnym. Warto omówić pokrótce główne wyniki w obu tych nurtach, pamiętając przy tym, że zaproponowane kryterium demarkacyjne ma charakter umowny.

Niedługo po ukazaniu się przełomowych prac Blacka i Scholesa (1973) oraz Mertona (1973), pojawił się pogląd, że zmienność implikowana z cen opcji mogłaby być wykorzystywana nie tylko jako prognoza oparta na oczekiwaniach uczestników rynku, lecz także jako potencjalny instrument bazowy, na który mogłyby opiewać kontrakty terminowe i opcje (dodatkowym bodźcem do rozwoju produktów na zmienność był jej znaczący wzrost obserwowany po załamaniu rynku w październiku 1987 r. (por. Brenner, Galai 1989), co jednak wymagało stworzenia referencyjnego indeksu zmienności implikowanej. Pierwsze próby na tym polu podjęli Gastineau (1977), Galai (1979) oraz Cox i Rubinstein (1985), którzy – w różnych wariantach – proponowali konstrukcje oparte na zmiennościach implikowanych z opcji po cenie (*at the money* – ATM) na akcje spółek notowanych na giełdzie amerykańskiej. Kolejnym istotnym krokiem było opracowanie indeksu zmienności implikowanej VIX, którego konstrukcję podali Fleming, Ostdiek i Whaley w artykule z 1993 r. (opublikowanym dwa lata później jako Fleming, Ostdiek i Whaley 1995). Indeks VIX opierał się na najbardziej płynnych kontraktach opcyjnych (4 typu *call* i 4 typu *put*) na indeks giełdowy S&P 100, a tym samym – inaczej niż poprzednie indeksy – odzwierciedlał ogólne ryzyko rynkowe, wpływające jednocześnie na zmienność wyceny wszystkich najważniejszych spółek. W tym

samym roku Whaley (1993) zaproponował wprowadzenie opcji i kontraktów *futures* na VIX[3], z kolei Neuberger (1994) przedstawił oryginalny pomysł kontraktu terminowego, który w chwili wygaśnięcia płaciłby logarytm naturalny z ceny instrumentu bazowego[4]. Jak pokazał Neuberger, całkowity zysk z dynamicznego zabezpieczenia takiego kontraktu byłby proporcjonalny do faktycznie zrealizowanej zmienności instrumentu bazowego, umożliwiając tym samym inwestorom zabezpieczenie ekspozycji na zmienność[5]. Choć *log contract* jako taki nigdy się nie upowszechnił, spostrzeżenie Neubergera legło u podstaw sformułowanej kilka lat później metody statycznej (i wolnej od założeń modelu Blacka-Scholesa) replikacji swapa wariancji, czyli kontraktu płacącego różnicę pomiędzy zmiennością zrealizowaną a implikowaną (Dupire 2004; Derman i in. 1999; Carr, Madan 2001). Metoda ta została wykorzystana do zmodyfikowania – uodpornienia i zbliżenia do praktyki rynkowej – konstrukcji indeksu VIX w 2003 r. (CBOE 2003), a to z kolei otworzyło drogę do rozwoju instrumentów pochodnych na zmienność[6]. Wyniki Dupire oraz Dermana i in. pozwalały wyceniać również bardziej skomplikowane instrumenty pochodne na zmienność – jak korytarzowe swapy wariancji (Carr, Lewis 2004), swapy odchylenia standardowego oraz opcje na zmienność implikowaną i zrealizowaną (Carr, Lee 2007).

W literaturze empirycznej na temat korzyści z bezpośredniego uwzględnienia zmienności w portfelu inwestorów rozróżnia się dwie miary zmienności: a) zmienność implikowaną z opcji, tj. odchylenie standardowe stóp zwrotu instrumentu bazowego, które należałoby podstawić do wzoru Blacka-Scholesa, aby otrzymać rynkową cenę opcji oraz b) zmienność zrealizowaną, czyli wariancję dziennych (logarytmicznych) stóp zwrotu z instrumentu bazowego, obliczoną w ustalonym oknie czasowym i przy założeniu zerowej wartości oczekiwanej[7]. Odpowiednio, analizuje się odrębnie dwa typy strategii: a) długą pozycję w kontraktach terminowych na indeks zmienności implikowanej (np. VIX lub VSTOXX) oraz b) krótką pozycję w kontrakcie na przyszłą zrealizowaną wariancję, tzw. *variance swap*. Na rzecz uwzględnienia w portfelu długiej pozycji w zmienności implikowanej przemawia jej silna ujemna korelacja z indeksami cen akcji, umożliwiająca dywersyfikację i zwiększenie stopy zwrotu skorygowanej o ryzyko (por. Daigler, Rossi 2006; Dash, Moran 2005; Moran, Dash 2007). W niedawnym badaniu Szado (2009) po-

[3] Wprawdzie pierwsze kontrakty terminowe na zmienność zostały wprowadzone już w 1997 r. (w Londynie przez OMLX) i 1998 r. (we Frankfurcie przez DTB), ale obrót i płynność rynku były początkowo rozczarowująco niewielkie – do tego stopnia, że obrót niemieckimi kontraktami terminowymi na zmienność (VOLAX) został zawieszony zaledwie 9 miesięcy po ich wprowadzeniu (Herrmann, Luedecke 2002).

[4] Niezależnie podobny wynik opublikował Dupire (1993).

[5] Niezależnie podobny wynik opublikował Dupire (1993).

[6] Otwarta w 2003 r. Chicago Futures Exchange tym razem z powodzeniem zainicjowała obrót kontraktami *futures* na nowy VIX, kontraktami na przyszłą zrealizowaną wariancję S&P 500 oraz, nieco później, opcjami europejskimi na VIX, które są aktualnie drugim najbardziej płynnym kontraktem opcyjnym oferowanym przez CBOE.

[7] Zmienność implikowana ma charakter antycypacyjny, jest miarą oczekiwań; tymczasem zmienność zrealizowana mierzy stopień fluktuacji instrumentu bazowego, który już się zmaterializował. Por. szerzej na temat estymatorów zmienności: Jabłecki, Kokoszczyński, Sakowski, Ślepaczuk i Wójcik (2013).

kazuje, że np. w czasie burzliwego 2008 r. stopa zwrotu z portfela składającego się w 60% z akcji i 40% z obligacji wyniosłaby –16% przy odchyleniu standardowym 22% (współczynnik Sharpe'a –0,74). Tymczasem dodanie do tego portfela nawet dziesięcioprocentowej ekspozycji na VIX *futures* pozwoliłoby osiągnąć stopę zwrotu bliską zera przy istotnie mniejszym odchyleniu standardowym. Z drugiej strony Alexander i Korovilas (2011) przekonują, że utrzymywanie pasywnej ekspozycji na VIX w dłuższym terminie generuje ujemną stopę zwrotu, która może przewyższyć korzyści z dywersyfikacji (por. Szado 2009). Z kolei druga strategia – tj. krótka pozycja w zmienności zrealizowanej – przynosiła historycznie wysoką stopę zwrotu (Hafner, Wallmeier 2008), ale za to – inaczej niż w przypadku VIX *futures* – charakteryzowała się silnie negatywną wyceną w stosunkowo krótkich okresach napięć na rynku finansowym. Atrakcyjność strategii wynika z obserwowanej historycznie premii w kwotowaniach zmienności aktualnie oczekiwanej ponad tę faktycznie zrealizowaną (tzw. v*olatility risk premium* – VRP; por. Bakshi, Kapadia 2003 oraz Carr, Wu 2009). Źródłem VRP jest asymetria ryzyka wpisana w kontrakt na zmienność zrealizowaną, w którym zajęcie krótkiej pozycji jest *de facto* równoważne wystawieniu ubezpieczenia drugiej stronie transakcji. Mając to na uwadze, Egloff, Leippold i Wu (2010) podkreślają wagę zabezpieczenia krótkiej pozycji w swapie wariancji, a Signori, Briere i Burgues (2010) sugerują, aby użyć do tego celu długiej pozycji w kontrakcie na zmienność implikowaną, tym samym łącząc oba nurty literatury empirycznej.

Struktura dalszej części artykułu jest podporządkowana pytaniom postawionym powyżej. W punkcie 2 wyjaśniamy, jak należy rozumieć zmienność, jakie są teoretyczne argumenty na rzecz inwestowania w zmienność i wreszcie, za pomocą jakich instrumentów można uzyskać bezpośrednią ekspozycję na zmienność. Z kolei w punkcie 3 pokażemy, jak ekspozycja na zmienność umożliwia inwestorom poprawę efektywności portfela, przekonując zarazem, że najlepszym rozwiązaniem jest jednoczesne zajęcie odpowiednio skalibrowanej krótkiej i długiej pozycji w zmienności.

2. Charakter ekspozycji na zmienność

Ponieważ zmienność nie jest bezpośrednio obserwowalna, jej definicja i estymacja nie są wcale trywialne z formalno-teoretycznego punktu widzenia (por. Jabłecki, Kokoszczyński, Sakowski, Ślepaczuk, Wójcik 2013). Na szczęście perspektywa rynkowa, którą przyjmujemy w niniejszym artykule, pozwala w pewnym stopniu uchylić się od tych rozważań. W dalszym ciągu zmienność będzie zawsze oznaczać albo zmienność zrealizowaną, czyli annualizowane odchylenie standardowe logarytmicznych stóp zwrotu z danego indeksu w danym okresie (obliczone przy założeniu zerowej wartości oczekiwanej), albo zmienność implikowaną, tj. parametr $\Sigma(K, T)$, który (przy pozostałych zmiennych znanych) należy podstawić do wzoru Blacka-Scholesa na wartość europejskiej opcji *call* o cenie wykonania K

i terminie *T*, aby otrzymać rynkową cenę tej opcji. Zmienność zrealizowana ma więc niejako charakter adaptacyjny, a zmienność implikowana antycypacyjny, przy czym oba pojęcia są ze sobą oczywiście ściśle związane, bo zmienność implikowana to cena, którą trzeba zapłacić dziś za ekspozycję (*explicite* lub *implicite*) na zmienność danego indeksu, która zrealizuje się w ustalonym horyzoncie w przyszłości. Zrealizowana czy implikowana zmienność ma kilka cech, które sprawiają, że może stanowić interesujący instrument inwestycyjny.

- Po pierwsze, zmienność ma tendencję do zwiększania się dokładnie wówczas, gdy na rynku rośnie niepewność.
- Po drugie, zmienność powraca do swej długoterminowej wartości średniej (*mean reversion*), tzn. wysokie wartości ulegną zmniejszeniu, a niskie – zwiększeniu.
- Po trzecie, zmienność instrumentu bazowego (pojedynczej akcji lub całego indeksu) jest często silnie ujemnie skorelowana ze stopami zwrotu z tego instrumentu, co nazywa się efektem dźwigni. Ekonomiczna interpretacja tego fenomenu – znajdująca zastosowanie w zasadzie wyłącznie w odniesieniu do rynku akcji – została po raz pierwszy opisana przez Blacka (1976), który zauważył, że przy danym poziomie zadłużenia spadek kapitału spółki (tj. jego ekonomicznej, rynkowej wyceny) zwiększa dźwignię tej spółki, a tym samym jej ryzyko (zmienność).
- Po czwarte wreszcie, obserwuje się zjawisko skupiania się zmienności (*volatility clustering*), polegające na tym, że zmienność utrzymuje się na wysokim poziomie przez dłuższy okres po silnych spadkach cen akcji.

Wychodząc od tych dobrze udokumentowanych własności zmienności, Demeterfi i in. (1999) wymieniają następujące główne zastosowania strategii opartych na zmienności:

- Kierunkowa spekulacja, czyli zajmowanie pozycji zgodnie z wyrobionym poglądem na temat najbardziej prawdopodobnej ścieżki ewolucji zmienności w przyszłości. Spekulacja może być relatywnie prosta i polegać na swoistym zakładzie, że zmienność będzie w przyszłości wyższa lub niższa niż obecnie lub – w nieco bardziej wyrafinowanej formie – dotyczyć kształtu struktury terminowej zmienności lub relatywnej wielkości zmienności implikowanej i zrealizowanej. Fakt dużego dysparytetu pomiędzy zmiennością implikowaną i zrealizowaną obserowany w latach 1997–1998 miał być, według Carra i Lee (2009), główną przesłanką rozwoju transakcji *variance swap*, w których krótką pozycję zajmowały fundusze typu hedgingowe.
- Ograniczanie ryzyka. Oprócz inwestorów, którzy bezpośrednio spekulują na zmienności, portfele szerokiej grupy uczestników rynku mają wbudowaną *explicite* lub *implicite* krótką pozycję w zmienności, w tym sensie, że parametry ich planów czy strategii inwestycyjnych mogą się pogorszyć w warunkach kryzysu bądź istotnego wzrostu zmienności na rynku. W takiej sytuacji znajdują się w szczególności fundusze akcyjne oraz inwestorzy w obligacje silnie wrażliwe na zmiany spreadów kredytowych. Ze względu na ujemną korelację pomiędzy poziomem indeksów cen akcji i spreadów CDS a zmiennością, zaję-

cie bezpośredniej długiej pozycji w zmienności pozwala zneutralizować część z ponoszonego, niejako pierwotnego ryzyka.

Najłatwiejszym sposobem uzyskania ekspozycji na zmienność jest kupno lub sprzedaż opcji. Wprawdzie opcja jako taka zawiera nie tylko pożądaną ekspozycję na zmienność, ale także kierunkową ekspozycję na poziom samego indeksu, jednak przez jednoczesne zawarcie przeciwstawnej pozycji w indeksie (tj. kontrakcie *futures* na indeks), można – przez dynamiczne dostosowywanie poziomu zabezpieczenia – zgodnie z metodą zaproponowaną przez Blacka i Scholesa – wyeliminować całą ekspozycję kierunkową. Niestety, w praktyce zabezpieczenie wrażliwości opcji na zmiany ceny instrumentu bazowego (tzw. *delta hedging*) ma kilka mankamentów. Po pierwsze, ściśle rzecz biorąc, wyeliminowanie ryzyka ceny instrumentu bazowego jest możliwe tylko przy dostosowywaniu zabezpieczenia w sposób ciągły. Jeśli natomiast – jak to się dzieje w rzeczywistości – zabezpieczenie jest korygowane dyskretnie (np. raz lub nawet kilka razy dziennie) popełnia się błąd o odchyleniu standardowym rzędu $1/\sqrt{2N}$, gdzie N jest liczbą dokonanych korekt początkowego zabezpieczenia (por. Derman, Taleb 2005). Im częstsze dostosowanie zabezpieczenia, tj. im więcej transakcji kupna lub sprzedaży instrumentu bazowego, tym dokładniejsza replikacja opcji, ale tym większe są także koszty transakcyjne (których wpływ można jednak ograniczyć, wykorzystując efekty skali i niwelowanie się pozycji w ramach dużego portfela). Wreszcie, strategia zabezpieczająca Blacka i Scholesa opiera się na założeniu, że ewolucja instrumentu bazowego jest dana procesem ciągłym (nie występują skoki cen) oraz nie występują problemy z płynnością i nie ma żadnych ograniczeń co do krótkiej sprzedaży, a żadne z tych założeń nie musi być trywialnie spełnione, szczególnie biorąc pod uwagę doświadczenia ostatniego kryzysu. Alternatywą dla opcji, wolną od powyższych mankamentów i umożliwiającą uzyskanie bezpośredniej, czystej ekspozycji na zmienność, są swapy wariancji oraz kontrakty terminowe na zmienność implikowaną, które zostaną kolejno omówione nieco dokładniej poniżej.

2.1. Swapy wariancji

Swap wariancji (*variance swap*) to kontrakt, którego wypłatę w momencie zapadalności można opisać wzorem:

$$V = notional \times (RV^2 - \Sigma^2), \tag{1}$$

gdzie $RV = \sqrt{\frac{N}{n}\sum_{t=1}^{n} \ln(S_t/S_{t-1})^2}$ to zmienność zrealizowana, czyli odchylenie standardowe logarytmicznych stóp zwrotu z instrumentu bazowego S (przy założeniu zerowej wartości oczekiwanej) w ciągu n dni do zapadalności transakcji, N to liczba dni handlowych w roku, a Σ to cena wykonania (*strike*) swapa, a więc zmienność oczekiwana w horyzoncie transakcji. Wreszcie *notional* to zaangażowanie nominalne kwotowane w jednostkach „vega", tj. wrażliwości swapa na zmia-

ny zmienności: *notional* = *vega*/(2Σ) = (∂Π/∂Σ)/(2Σ)[8]. Widać stąd, że nazwa *variance swap* może być w pewnym sensie myląca. W istocie bowiem chodzi nie tyle o swapa, co o transakcję terminową – po prostu zakład o to, jaka zmienność instrumentu bazowego zrealizuje się w ustalonym okresie w przyszłości.

Niezwykle atrakcyjną cechą swapa wariancji jest możliwość replikacji jego wypłaty poprzez statyczną pozycję w opcjach i dynamiczną pozycję w instrumencie bazowym – najczęściej kontraktach *futures* na indeks bazowy, np. S&P500. Intuicyjnie najlepiej się o tym przekonać, porównując funkcję wypłaty swapa wariancji i funkcję wypłaty dynamicznie zabezpieczanej pozycji opcyjnej, tj. portfela składającego się z długiej pozycji w opcji *call* $C(S, t)$ i krótkiej pozycji w $\partial C/\partial S$ jednostkach instrumentu bazowego S. Zysk/stratę z takiej strategii można zapisać następującym równaniem (por. Jabłecki, Kokoszczyński, Sakowski, Ślepaczuk, Wójcik 2013):

$$P\&L = \frac{1}{2}\sum_{t=0}^{n}\Gamma_t S_t^2(R_t^2 - \Sigma^2\Delta t) = \frac{1}{2}\sum_{t=0}^{n}\Gamma_t^{\$}(R_t^2 - \Sigma^2\Delta t), \tag{2}$$

gdzie:
$\Gamma^{\$} = \partial^2 C/\partial S^2 \times S^2$,
R_t – prosta stopa zwrotu z S w czasie t,
Σ – zmienność implikowana.

Z (2) wynika, że dynamicznie zabezpieczając opcję, otrzymuje się zysk lub stratę proporcjonalne do różnicy pomiędzy wariancją zrealizowaną a implikowaną – podobnie jak w swapie wariancji. Jednak inaczej niż w swapie, kwadraty stóp zwrotu są ważone $\Gamma^{\$}$, tj. iloczynem gammy i ceny instrumentu bazowego, a oba te parametry zmieniają się oczywiście z upływem czasu. Skoro więc dynamiczne zabezpieczanie opcji na S odtwarza wypłatę „ważonego" swapa wariancji, to replikacja prawdziwego kontraktu powinna polegać na odpowiednim połączeniu pozycji w kilku opcjach, tak aby w rezultacie otrzymać stałą wartość ($\Gamma^{\$}$). Możliwość statycznej replikacji swapa wariancji czyni jego wycenę w dużym stopniu wolną od założeń modelowych i opartą jedynie na cenach rynkowych.

Kluczem do wyceny swapa wariancji jest wyznaczenie wartości godziwej zmienności implikowanej Σ[9]. Podobnie jak w każdym kontrakcie terminowym, *strike* musi gwarantować zerową zdyskontowaną wartość oczekiwaną kontraktu w chwili jego zawarcia, tj. musi spełniać warunek $\Sigma^2 = \mathbb{E}(RV^2)$. Instrumentem bazowym dla swapa wariancji S&P 500 (lub innego indeksu giełdowego) jest kontrakt *futures* na ten indeks, F_i, handlowany w dyskretnych chwilach („dniach") $t_0, \ldots, t_n$. Interesuje nas zatem wartość oczekiwana zannualizowanej wariancji:

$$RV^2 = \frac{N}{n}\sum_{t=1}^{n}\ln^2(F_i/F_{i-1}). \tag{3}$$

[8] Ponieważ *vega* = $\partial\Pi/\partial\Sigma = 2 \times$ *notional* $\times \Sigma$, to ten na pozór nieintuicyjny sposób kwotowania sprawia, że vega w momencie zawierania transakcji wynosi 1. Co więcej, jeśli zmienność będzie zrealizowana w terminie zapadalności o 1 punkt większa niż *strike*, wypłata będzie w przybliżeniu równa iloczynowi vegi i różnicy ($RV^2 - \Sigma^2$).

[9] Poniższy wywód opiera się na konstrukcji zaproponowanej w pracy: Carr i Lee (2009).

Aby wyznaczyć strategię replikującą (3), zauważmy, że korzystając z rozwinięcia funkcji $\ln(x)$ w szereg Taylora można napisać:

$$\ln(F_i) = \ln(F_{i-1}) + \frac{1}{F_{i-1}}(F_i - F_{i-1}) - \frac{1}{2F_{i-1}^2}(F_i - F_{i-1})^2 + ... \tag{4}$$

Analogicznie jak poprzednio, proste stopy zwrotu z F oznaczamy przez $R_i = (F_i - F_{i-1})/F_{i-1}$, co pozwala zapisać (4) jako $\ln(F_i/F_{i-1}) = R_i - \frac{1}{2}R_i^2 + \varepsilon(R_i^3)$, gdzie $\varepsilon(R_i^3)$ oznacza błąd rzędu trzeciej potęgi stóp zwrotu, zaniedbywalny przy niewielkich wartościach R_i. Po obustronnym podniesieniu do kwadratu otrzymujemy $\ln^2(F_i/F_{i-1}) = R_i^2 - \epsilon(R_i^3)$, a otrzymane w ten sposób wyrażenie na R_i^2 można teraz podstawić do (4) ($i = 1, \ldots, n$):

$$\begin{aligned} \ln(F_i) &= \ln(F_{i-1}) + R_i - \frac{1}{2}R_i^2 + \epsilon(R_i^3) = \\ &= \ln(F_{i-1}) + R_i - \frac{1}{2}\ln^2(F_i/F_{i-1}) + \epsilon(R_i^3). \end{aligned} \tag{5}$$

Stąd, z dokładnością do $\varepsilon(R_i^3)$,

$$\ln^2(F_i/F_{i-1}) = 2R_i - 2(\ln(F_i) - \ln(F_{i-1})) \tag{6}$$

i ostatecznie

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \ln^2(F_i/F_{i-1}) &= \sum_{i=1}^{n} 2R_i - 2\sum_{i=1}^{n}(\ln(F_i) - \ln(F_{i-1})) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{F_{i-1}}(F_i - F_{i-1}) - 2(\ln(F_n) - \ln(F_0)). \end{aligned} \tag{7}$$

Carr i Madan (2001) pokazują, że każdą dwukrotnie różniczkowalną funkcję wypłaty $f(F_T)$ można przedstawić jako[10]:

$$\begin{aligned} f(F_T) = f(\kappa) + f'(\kappa)(F_T - \kappa) + \int_0^{\kappa} f''(K)(K - F_T)^+ dK + \\ + \int_{\kappa}^{\infty} f''(K)(F_T - K)^+ dK, \end{aligned} \tag{8}$$

gdzie κ jest dowolną liczbą dodatnią, a $(K - F_T)^+$ oznacza $\max(0, K - F_T)$. Zatem dla $\ln(F_n)$ i $\kappa = F_0$ zachodzi:

$$\begin{aligned} \ln(F_n) = \ln(F_0) + \frac{1}{F_0}(F_n - F_0) + \int_0^{F_0} \frac{-1}{K^2}(K - F_n)^+ dK + \\ + \int_{F_0}^{\infty} \frac{-1}{K^2}(K)(F_n - K)^+ dK. \end{aligned} \tag{9}$$

[10] Dowód Carra i Madana opiera się na wykorzystaniu funkcji δ Diraca, ale istnieje także prostsze rozumowanie. Zauważmy, że $f(F) - f(\kappa) = \int_{\kappa}^{F} f'(u)du$. Stąd $\int_{\kappa}^{F} f'(u)du = \mathbb{I}_{\{F>\kappa\}} \int_{\kappa}^{F} f'(u)du + \mathbb{I}_{\{F<\kappa\}} \int_{\kappa}^{F} f'(u)du =$ $= 1_{\{F>\kappa\}} \int_{\kappa}^{F} f'(u)du - 1_{\{F<\kappa\}} \int_{F}^{\kappa} f'(u)du$. Na tej samej zasadzie $\int_{\kappa}^{F} f'(u)du = 1_{\{F>\kappa\}} \int_{\kappa}^{F} \left[f'(\kappa) + \right.$ $\left. + \int_{\kappa}^{u} f''(v)dv\right]du - 1_{\{F<\kappa\}} \int_{F}^{\kappa} \left[f'(\kappa) + \int_{u}^{\kappa} f''(v)dv\right]du$. Ponieważ $\int_{\kappa}^{F} \int_{u}^{\kappa} f''(v)dvdu = \int_{\kappa}^{F} \int_{v}^{F} f''(v)dudv =$ $= \int_{\kappa}^{F} f''(v)(F - v)dv$, i analogicznie $\int_{F}^{\kappa} \int_{u}^{\kappa} f''(v)dvdu$, to podstawiając obie całki otrzymuje się żądaną reprezentację.

Podstawiając do (7) otrzymujemy wreszcie:

$$\sum_{i=1}^{n} \ln^2(F_i/F_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} 2\left(\frac{1}{F_{i-1}} - \frac{1}{F_0}\right)(F_i - F_{i-1}) + \\ + \int_0^{F_0} \frac{2}{K^2}(K - F_n)^+ dK + \int_{F_0}^{\infty} \frac{2}{K^2}(K)(F_n - K)^+ dK. \tag{10}$$

W ten sposób otrzymaliśmy dekompozycję sumy kwadratów logarytmicznych stóp zwrotu na: a) dynamiczną pozycję w kontraktach *futures*, na którą składa się $\left(\frac{1}{F_{i-1}} - \frac{1}{F_0}\right)$ jednostek kontraktu w dniu $i - 1$; b) statyczną pozycję $\frac{2}{K^2}dk$ opcjach *put* na wszystkie poziomy *strike* poniżej początkowego poziomu indeksu F_0; c) statyczną pozycję w $\frac{2}{K^2}dk$ opcjach *call* na wszystkie poziomy *strike* powyżej F_0. Zysk/strata z dynamicznej pozycji w *futures* znika pod wartością oczekiwaną (przy założeniu neutralności wobec ryzyka), więc *strike* swapa wariancji dany jest wzorem:

$$\Sigma^2 = \mathbb{E}(RV^2) = \int_0^{F_0} \frac{2}{K^2}(K - F_n)^+ dK + \int_{F_0}^{\infty} \frac{2}{K^2}(K)(F_n - K)^+ dK. \tag{11}$$

Wzór (11) podaje przepis na statyczną replikację swapa wariancji – niezależny od upływu czasu i poziomu indeksu, a także wolny od założeń modelowych co do wyceny opcji. Zgodnie z intuicją wagi w zabezpieczających kontraktach opcyjnych zostały dobrane w taki sposób, aby całkowita pozycja miała stałą gammę $\Gamma^{\$}$[11].

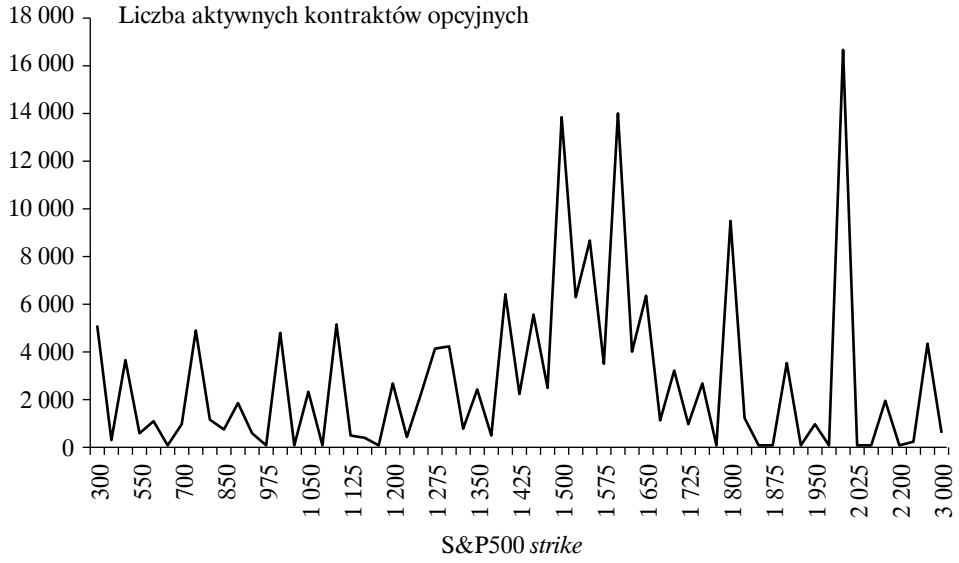
Pierwszy udokumentowany przykład kontraktu *variance swap* dotyczy transakcji zawartej przez szwajcarski bank inwestycyjny UBS w 1993 r. (Carr, Lee 2007). Bank starał się wówczas domknąć krótką pozycję w zmienności implikowanej i kupił swapa na wariancję indeksu FTSE100 za milion funtów z ceną wykonania 15 pkt. Wobec braku lepszej metody kontrakt wyceniono tak, jak strukturę opcyjną *straddle* złożoną z dwóch kupionych opcji ATM *call* i *put*, która charakteryzuje się podobnym profilem wypłaty, ale gdzie ekspozycja na zmienność nie jest czysta. Rynek *variance swap* zaczął się jednak rozwijać dopiero pod koniec lat 90., w miarę upowszechniania się literatury teoretycznej, która wskazywała, jak efektywnie zabezpieczyć (zreplikować) pozycję w zrealizowanej wariancji (przede wszystkim Derman i in. 1998; Derman i in. 1999 oraz Carr, Madan 2001).

Kontraktami *variance swap* handluje się na rynku pozagiełdowym (tzw. *over-the-counter* – OTC), co utrudnia precyzyjne ustalenie wielkości obrotów, ale według szacunków czasopisma branżowego „Risk" można mówić o dziennej

[11] Im większa cena wykonania opcji, tym większy wkład związanego z nią iloczynu $\Gamma_i K_i^2$ w całkowitą gammę pozycji. Intuicja podpowiada więc, że wagi kontraktów opcyjnych w strategii replikacyjnej powinny być odwrotnie proporcjonalne do poziomów *strike* opcji – duże dla tych o niskim *strike* i małe dla tych o wysokim *strike*. Rzeczywiście, jak wykazaliśmy, wagi mają postać $2/K^2$. Formalnie można też zauważyć, że warunek $\Gamma^{\$} = \partial^2 V/\partial S^2 \times S^2 = \text{const}$ pociąga za sobą $\partial^2 V/\partial S^2 = a/S^2$ dla pewnej stałej a. Rozwiązanie tego równania ma postać: $V(S) = -a\ln(S) + bS + c$, co potwierdza otrzymany wyżej formalnie wynik, że V można statycznie zreplikować przez pozycje w hipotetycznym kontrakcie wypłacającym logarytm ceny instrumentu bazowego (dającym się przybliżyć opcjami), instrumencie bazowym i gotówce (por. szerzej Bossu 2006).

Rysunek 1

Liczba aktywnych kontraktów opcyjnych na S&P 500 notowanych na CBOE (data wygaśnięcia grudzień 2015 r.)



Źrodło: dane Bloomberg, oprac. własne.

ekspozycji na punkt zmienności rzędu 5 mln USD (przy typowych transakcjach wielkości 100–200 tys. euro w jednostkach vega), co – mimo załamania w latach 2008–2009 – oznacza dziesięciokrotny wzrost rynku od wczesnych lat 2000. Instrumentem bazowym dla kontraktów *variance swap* są przede wszystkim indeksy giełdowe w Stanach Zjednoczonych (S&P 500, Nasdaq, Russell 2000), Europie (EuroStoxx 50, FTSE, DAX) oraz Azji (Nikkei 225, Topix, HSI). Przed kryzysem handlowano też swapami na zmienność zrealizowaną cen pojedynczych spółek, ale rynek ten praktycznie zamarł w czasie kryzysu. Wydaje się, że można to tłumaczyć faktem, że dla indeksów dostępny jest dużo większy zakres opcji poza ceną (*out-of-the-money* – OTM) niż dla akcji pojedynczych spółek. Na przykład dla najbardziej płynnego na świecie indeksu S&P 500 – na którym zawieranych jest 46% wszystkich opcji na indeks[12] – notowane są opcje nawet dla *strike* 100, tj. zledwie ok. 6% aktualnego poziomu indeksu. Oczywiście wciąż nie jest to kontinuum potrzebne do replikacji wypłaty swapa (por. (11)), ale dla uczestników rynku jest to najwyraźniej satysfakcjonujące przybliżenie (por. rys. 1).

W reakcji na rosnące zainteresowanie kontraktami *variance swap* i starając się przyciągnąć uczestników rynku OTC, amerykańska giełda CBOE Futures Exchange wprowadziła w maju 2004 r. kontrakty *futures* na 3-miesięczną wariancję zrealizowaną. Z założenia konstrukcja tych kontraktów miała wykorzystywać konwencje stosowane na rynku pozagiełdowym, dając zarazem inwestorom pro-

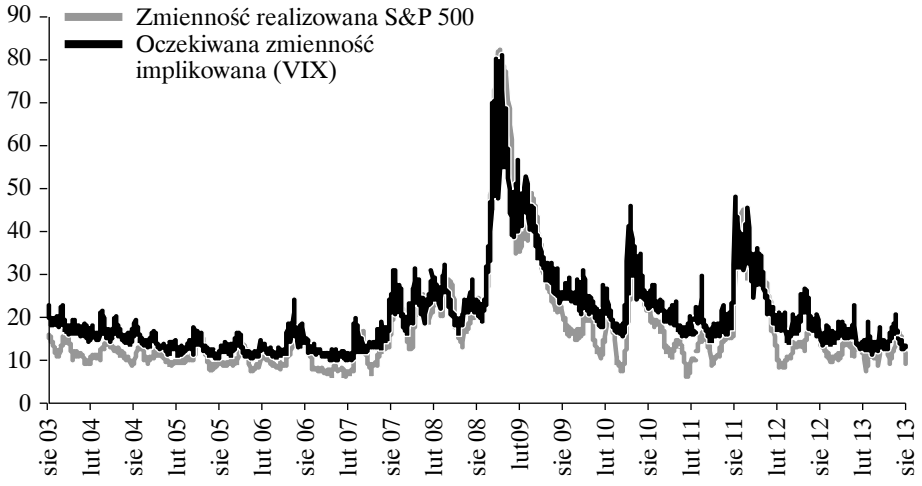
[12] W 2012 r. wartość aktywnych kontraktów opcyjnych na S&P 500 opiewała na ponad 2 bln dol., na EUROSTOXX 50 – 1,1 bln dol i na Nikkei 225 – 366 mld dol. Dane zaczerpnięte z Kolanovic (2012).

dukt potencjalnie bardziej płynny i transparentny. Stworzenie nowego produktu okazało się sukcesem, o czym może świadczyć rosnąca liczba aktywnych kontraktów w latach 2004–2008. Giełdowy obrót swapami załamał się podczas kryzysu (co odzwierciedlało tendencje obserwowane również na rynku OTC), ale później zaczął się odradzać na fali ogólnej poprawy nastrojów wśród inwestorów i po wprowadzeniu przez CBOE pewnych usprawnień w specyfikacji kontraktu.

Ciekawą cechą swapów wariancji jest to, że na rynku utrzymywała się historycznie dość istotna przewaga krótkich pozycji nad długimi (w 2008 r. analitycy JP Morgan szacowali ją na 300–400 mln dol. wrażliwości na punkt zmienności dziennie). Popularność krótkich pozycji wynikała z tego, że pozwalały one inwestorom zasilić portfele dodatkową premią za ryzyko (tzw. *violatility risk premium* – VRP), wyrażoną w utrzymującym się historycznie dodatnim spreadzie pomiędzy zmiennością implikowaną a zrealizowaną (Bakshi, Kapadia 2003; Bondarenko 2004). Inaczej mówiąc, ceny rynkowe swapów wariancji kształtowały się historycznie powyżej oczekiwanej przez rynek wariancji danego indeksu. Część tej nadwyżki można przypisać wypukłości (*convexity*) wypłaty: długa pozycja w swapie zarobi więcej przy wzroście zmienności ponad *strike* o ϵ niż straci w przeciwnym przypadku, co musi być uwzględnione w wycenie (Bollen, Whaley 2004). Drugim istotnym czynnikiem jest asymetria ryzyka pomiędzy krótką i długą pozycją w zmienności: wystawca (netto) opcji ponosi potencjalnie nieograniczone straty, a nabywca (netto) ryzykuje tylko zapłaconą premią. Krótka pozycja w zmienności przypomina więc w sensie ekonomicznym wystawienie ubezpieczenia: jest potencjalnie bardzo ryzykowna, ale w długim okresie może być źródłem atrakcyjnych zysków, pod warunkiem utrzymania dostatecznego kapitału na pokrycie okazjonalnych nieuniknionych strat. Rysunek 2 przedstawia *variance risk premium*, która w latach 2003–2013 wyniosła średnio nieco ponad 3 pkt. proc.

Rysunek 2

Dodatkowa premia za ryzyko (2003–2013)



Źródło: dane Bloomberg, opracowanie własne.

2.2 Indeks VIX oraz kontrakty terminowe na jego zmienność

Drugim, obok *variance swap*, instrumentem umożliwiającym uzyskanie „czystej" ekspozycji na zmienność są kontrakty terminowe (*futures*) na zmienność implikowaną. Chociaż teoretycznie można sobie wyobrazić kontrakty na zmienność implikowaną poszczególnych akcji, rynek opcji jest w takich przypadkach na ogół zdecydowanie zbyt mało płynny (tj. dostępne są tylko opcje o kilku poziomach *strike*), więc w praktyce spotyka się przede wszystkim kontrakty na zmienność indeksów akcji kwotowanych na danej giełdzie. Najbardziej rozpowszechnionym tego typu indeksem jest stworzony przez giełdę chicagowską w 1993 r. indeks VIX i to na jego przykładzie będzie oparta dalsza analiza.

Indeks VIX ma jakby dwa życia. Pierwsze dał mu Whaley (1993), który zaproponował, aby kwotowaną na rynku powierzchnię zmienności S&P100 zsyntetyzować, obliczając średnią arytmetyczną zmienności implikowanych z 8 najbardziej płynnych kontraktów (4 typu *call* i 4 typu *put*). Prawdziwym celem Whaleya – na co zresztą wskazuje tytuł jego artykułu – była nie tyle konstrukcja indeksu zmienności sama w sobie, co wprowadzenie kontraktów *futures*, a nawet opcji na zmienność implikowaną. Te jednak weszły do obrotu dopiero dziesięć lat później, odpowiednio w 2004 r. i 2006 r., i to po odrodzeniu się indeksu VIX w nowej postaci nadanej mu w 2003 r. Modyfikacja pierwotnej konstrukcji indeksu obejmowała trzy główne elementy (Carr, Lee 2009). Po pierwsze, indeks bazowy S&P 100 zastąpiono bardziej rozpoznawalnym S&P 500, na który z czasem wykształcił się większy rynek opcji. Po drugie, dostosowując się do konwencji rynkowych, zmieniono metodę annualizacji z dni kalendarzowych na dni robocze. Po trzecie, najważniejsze, w konstrukcji indeksu zrezygnowano ze zwykłej średniej zmienności implikowanych na rzecz – wolnej od założeń metodologicznych – statycznej replikacji swapa wariancji, opisanej w punkcie 2.1. Zgodnie z nową definicją indeks VIX jest wyznaczany na podstawie następującego równania (por. CBOE 2009, gdzie przedstawiono też konkretny przykład obliczeń):

$$VIX^2 = \frac{2}{T}\sum_i \frac{\Delta K_i}{K_i^2} e^{RT} Q(K_i) - \frac{1}{T}\left(\frac{F}{K_0} - 1\right)^2, \tag{12}$$

gdzie T – czas do zapadalności opcji (30 dni)[13], F – cena *forward* indeksu wyznaczona na podstawie cen opcji, K_0 – pierwszy poziom *strike* poniżej F, K_i – poziom *strike* opcji (jeśli $K_i > K_0$ jest to opcja *call* OTM, jeśli $K_i < K_0$ – opcja *put* OTM, a gdy $K_i = K_0$ – średnia z *put* i *call*), ΔK_i – połowa różnicy między kolejnymi poziomami *strike* K_i, R – stopa procentowa, $Q(K_i)$ – cena opcji OTM wyrażona jako punkt środkowy pomiędzy cenami kupna i sprzedaży (*ask* i *bid*).

[13] Oprócz indeksu VIX, którego horyzont obejmuje najbliższe 30 dni, CBOE wyznacza także analogiczną metodą indeks VXV oczekiwanej zmienności S&P 500 w ciągu najbliższych 3 miesięcy.

Przyjęta definicja indeksu VIX polega na dyskretyzacji wyprowadzonego wcześniej równania (11), a dodatkowy element, tj. odejmowane wyrażenie $1/T(F/K_0 - 1)^2$, to korekta, którą trzeba uwzględnić ze względu na wykorzystanie w K_0 średniej z opcji *put* i *call* zamiast pojedynczej opcji *put* OTM[14]. Stąd w nowej odsłonie VIX wyraża dokładnie oczekiwaną 30-dniową zmienność indeksu S&P 500, a tym samym jest równy wartości godziwej poziomu *strike* dla jednomiesięcznego *variance swap*[15].

Mimo atrakcyjnej interpretacji w indeksie VIX nie można zajmować pozycji bezpośrednio – tj. nie jest możliwe stworzenie instrumentu, którego wartość byłaby wyrażona poziomem VIX. Dzieje się tak dlatego, że VIX wyraża w każdej chwili oczekiwaną zmienność S&P 500 w ciągu kolejnego miesiąca (od tej chwili). Jeśli np. ktoś otworzyłby pozycję w jednomiesięcznym *variance swap*, to po tygodniu zysk na takiej pozycji byłyby równy sumie zysku (ew. straty) narosłego w ciągu tygodnia i oczekiwanej zmienności w ciągu kolejnych 3 tygodni. Tymczasem indeks VIX tego dnia wciąż wyrażałby oczekiwaną zmienność w ciągu kolejnych 4 tygodni.

Od tego drobnego mankamentu wolne są jednak wprowadzone w 2004 r. przez CBOE kontrakty *futures*, które rozlicza się do poziomu indeksu VIX w dniu wygaśnięcia transakcji, co z ekonomicznego punktu widzenia upodabnia je do kontraktów *variance swap* na datę *forward* (z tym że – jak pisaliśmy wyżej – te ostatnie mają kwadratową, a nie liniową funkcję wypłaty). Ceny kontraktów *futures* na VIX wyrażają zatem oczekiwania uczestników rynku co do zmienności S&P 500, jaka będzie uwzględniona w cenach 30-dniowych opcji w terminie zapadalności kontraktu. Początkowo zainteresowanie nowym produktem było umiarkowane, jednak wyraźnie wzrosło w ciągu ostatnich kilku lat, do czego z jednej strony mógł się przyczynić wzrost obaw o ryzyko kontrahenta w transakcjach *variance swap* na rynku nieregulowanym, a z drugiej silne zapotrzebowanie na efektywny instrument dywersyfikacji ryzyka. Wprawdzie liczba aktywnych kontraktów na VIX jest wciąż o rząd wielkości mniejsza niż w przypadku opcji na S&P 500, ale w ciągu ostatnich trzech lat zwiększyła się około dziesięciokrotnie (rys. 3).

---

[14] Do replikacji *variance swap* wykorzystuje się opcje OTM, tymczasem w $K_0 < F$ opcja *call* jest w pieniądzu. Jednak na mocy parytetu *put-call* $e^{RT}C(K_0) = e^{RT}P(K_0) + F - K_0$ można zastosować następujące przekształcenie:

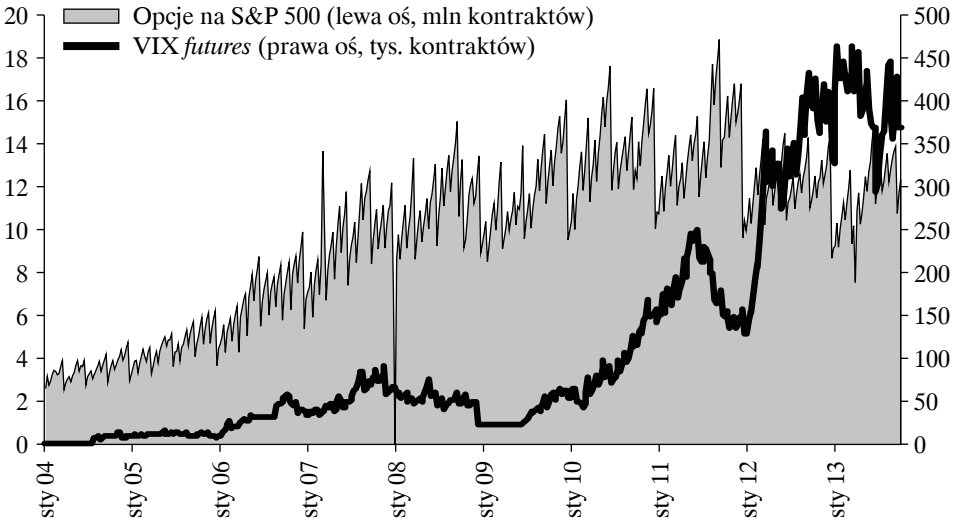
$$\frac{2}{T}\frac{\Delta K_0}{K_0^2}e^{RT}Q(K_0) = \frac{2}{T}\frac{\Delta K_0}{K_0^2}e^{RT}\frac{P(K_0)+C(K_0)}{2} = \frac{2}{T}\frac{\Delta K_0}{K_0^2}e^{RT}P(K_0) + \frac{\Delta K_0}{TK_0^2}(F-K_0).$$

W ten sposób w (12) otrzymujemy sumę $(2/T)\sum_i \frac{\Delta K_t}{K_t^2}e^{RT}Q(K_i)$ braną jedynie po opcjach OTM, a przy dodatkowym założeniu, że F znajduje się dokładnie w połowie przedziału między kolejnymi poziomami *strike*, tj. $\Delta K_0 \approx F_t - K_0$, wyrażenia $\frac{\Delta K_0}{TK_0^2}(F-K_0)$ i $-\frac{1}{T}\left(\frac{F}{K_0}-1\right)^2$ się skracają.

[15] Do obliczeń wykorzystuje się opcje zapadające za 30 dni. Oczywiście taki zestaw kontraktów trafia się tylko raz w ciągu miesiąca, więc w inne dni oblicza się indeks VIX dla dwóch różnych terminów zapadalności i liniowo interpoluje tak, aby otrzymać zmienność 30-dniową.

Rysunek 3

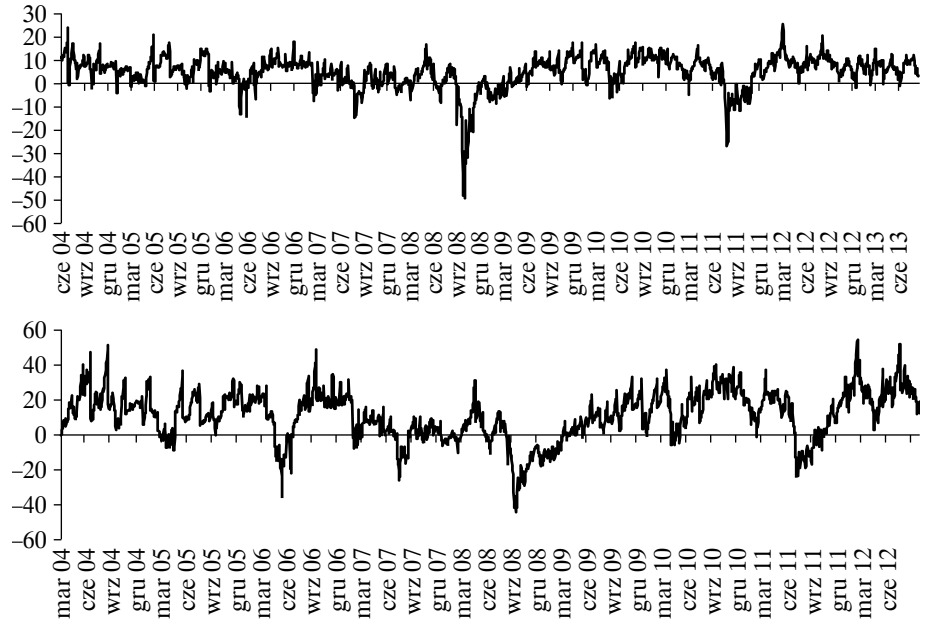
Liczba aktywnych kontraktów opcyjnych na S&P 500 i kontraktów *futures* na VIX



Źródło: dane CBOE, opracowanie własne.

Rysunek 4

Koszt odnawiania kontraktów *futures* na indeks VIX (w % – górny panel) i nachylenie krzywej kontraktów (w % – dolny panel)



Uwaga: Miesięczny koszt odnawiania kontraktu zdefiniowano jako różnicę między 1. i 2. kontraktem VIX *futures* wyrażoną jako procent 2. kontraktu. Nachylenie krzywej kontraktów VIX *futures* zdefiniowano jako 5M/2M VIX *futures* – 1.
Źródło: dane Bloomberg, opracowanie własne.

Aktualnie dostępne są kontrakty na 9 kolejnych miesięcy, co pozwala na wyznaczenie struktury terminowej oczekiwanej zmienności w podobny sposób jak robi się to dla stóp procentowych. Analogia z krzywą dochodowości na tym się jednak nie kończy, bo krzywa kontraktów *futures* na indeks VIX również może być dodatnio lub ujemnie nachylona, a tworzące ją punkty węzłowe mogą wykazywać różną wrażliwość na zmiany VIX (*spot*), prowadząc tym samym do różnych zmian poziomu i nachylenia samej krzywej. Ujemne nachylenie struktury terminowej kontraktów *futures* na indeks VIX, nazywane też *backwardation*, jest charakterystyczne dla epizodów wysokiej zmienności oraz podwyższonej percepcji ryzyka wśród uczestników rynku i odzwierciedla oczekiwania na powrót tego indeksu do długoterminowej średniej. Spotykane znacznie częściej – w okresach, w których przeważa apetyt na ryzyko – dodatnie nachylenie krzywej (*contango*) ma kompensować zajmującym krótką pozycję koszt ryzyka związanego z potencjalnym załamaniem na rynku akcji i znacznym wzrostem implikowanej zmienności. W tym sensie *contango* krzywej jest kosztem utrzymywania długiej pozycji w zmienności. Jeśli bowiem krzywa nie zmieni w tym czasie nachylenia, wartość *futures* zbiegnie do ceny indeksu *spot* w dniu zapadalności, co będzie prowadzić do, często niezaniedbywanych, kosztów odnowienia kontraktu (rys. 4) i powodować stopniową erozję wyceny portfela z długą ekspozycją w zmienności.

3. Zmienność w optymalizacji portfela

Zasadnicza wartość dodana przedstawionych w poprzednim punkcie instrumentów pochodnych na zmienność polega na tym, że mogą zwiększyć efektywność – tj. zmniejszyć ryzyko lub zwiększyć stopę zwrotu – tradycyjnych planów inwestycyjnych. Aby to zilustrować, przedstawimy poniżej efekty dodania do portfela składającego się wyjściowo z akcji i obligacji ekspozycji na zmienność w formie: a) długiej pozycji w zmienności implikowanej, b) krótkiej pozycji w zmienności zrealizowanej oraz c) kombinacji krótkiej pozycji w zmienności zrealizowanej i długiej pozycji w zmienności implikowanej. Analiza empiryczna obejmuje okres od zaktualizowania metody kalkulacji indeksu VIX, a więc lata 2003–2013 i – dla zapewnienia porównywalności z Szado (2009) oraz Signori, Briere i Burguesem (2010) – została przeprowadzona na danych z rynku amerykańskiego.

3.1 Portfel benchmarkowy

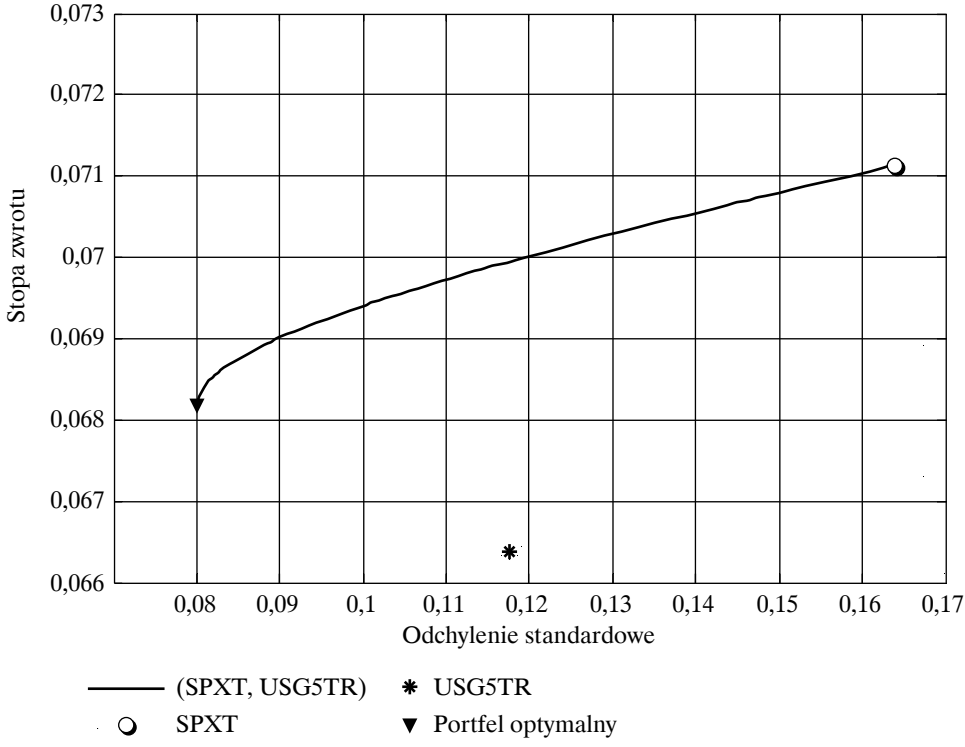
Benchmarkiem, tj. punktem odniesienia w analizie, jest pasywnie zarządzany portfel z ekspozycją na amerykański rynek akcji i obligacji. Za dobre przybliżenie dochodowości tych dwóch klas aktywów można uznać annualizowane stopy zwrotu z indeksów S&P 500 (SPXT) oraz indeksu amerykańskich skarbowych papierów wartościowych o średnim terminie do zapadalności 10 lat opracowa-

nego przez serwis Bloomberg (US Government Total Return Index, USG5TR). Chociaż w żaden z indeksów nie można w ścisłym sensie zainwestować bezpośrednio – mają one po prostu replikować zyski zdywersyfikowanego portfela akcji (w przypadku SPXT) lub obligacji o danym średnim terminie zapadalności (USG5TR) – to dostępne są fundusze ETF odzwierciedlające bardzo precyzyjnie ich wyniki. W okresie 2003–2013 indeks S&P 500 osiągnął annualizowaną stopę zwrotu 7,1% przy annualizowanym odchyleniu standardowym 16%. Z kolei inwestycja w obligacje – silnie wsparta zakupami obligacji skarbowych przez Rezerwę Federalną od 2009 r. – przyniosła aż 6,6% przy odchyleniu standardowym 11,6%. Wreszcie rolowanie krótkoterminowej lokaty na rynku międzybankowym (stanowiące przybliżenie stopy wolnej od ryzyka) pozwalało zarobić średnio 2% w skali roku.

Rysunek 5 przedstawia krzywą portfeli akcji i obligacji efektywnych w sensie Markowitza (1952). Okazuje się, że optymalny współczynnik Sharpe'a (0,60) gwarantuje portfel złożony w 39% z akcji i 61% z obligacji. Przeciętne odchylenie od średniej nie jest, jak wiadomo, dobrą miarą ryzyka inwestycji, szczególnie gdy rozkład stóp zwrotu charakteryzuje się grubymi ogonami. Bardziej odpowiednią

Rysunek 5

Portfele akcji i obligacji efektywne w sensie Markowitza (2003–2013)



Wagi ekspozycji na akcje i obligacji w portfelu optymalnym wynoszą odpowiednio 39% i 61%.

Źródło: dane Bloomberg, obliczenia własne.

miarą – choć też niepozbawioną wad (por. np. Yamai, Yoshiba 2005) – jest wartość narażona na ryzyko (*value at risk* – VaR), czyli maksymalna strata, jakiej można się spodziewać na danym poziomie ufności. VaR dla portfela akcji i obligacji (o wagach odpowiednio 0,39 i 0,61), wyznaczony jako 1. percentyl rozkładu miesięcznych annualizowanych stóp zwrotu (tj. 99. percentyl rozkładu strat), oszacowany na całej próbie, wyniósł –30,7% (tab. 1).

Tabela 1

Zmienność jako klasa aktywów: porównanie parametrów optymalnych portfeli w czterech analizowanych strategiach (2003–2013)

	Benchmark	Długa pozycja	Krótka pozycja	Kombinacja długa/krótka
Stopa zwrotu	0,068	0,092	0,100	0,147
Odchylenie standardowe	0,080	0,073	0,107	0,080
Współczynnik Sharpe'a	0,602	0,993	0,748	1,586
99% VaR	–0,307	–0,169	–0,440	–0,116

Skład portfeli: benchmark (39% SPXT, 61% USG5TR), długa pozycja (46% SPXT, 30% USG5TR, 24% SPDVIXT), krótka pozycja (10% SPXT, 65% USG5TR, 25% VARSWAP), kombinacja długa/krótka pozycja (15% SPXT, 14% USG5TR, 39% SPDVIXT, 32% VARSWAP). Optymalne portfele wyznaczone metodą maksymalizacji współczynnika Sharpe'a.

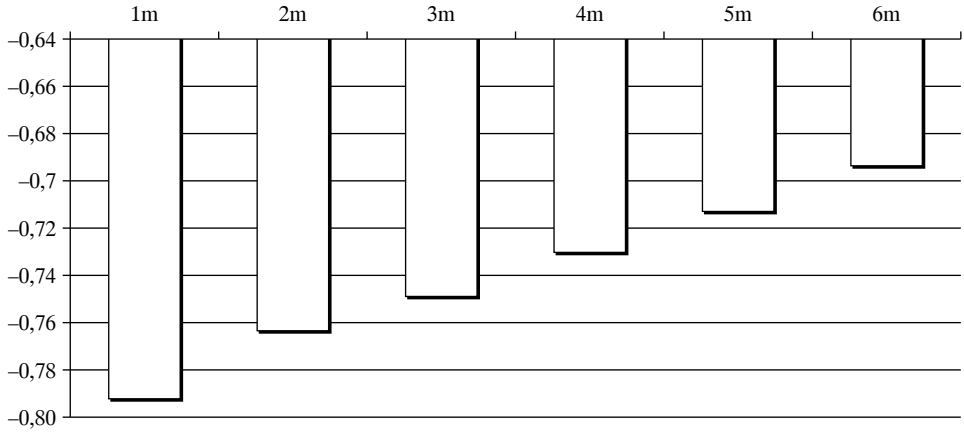
Źródło: obliczenia własne.

3.2. Długa pozycja w zmienności implikowanej

Podstawową przesłanką ekonomiczną dodania długiej ekspozycji na zmienność implikowaną do portfela akcji i obligacji jest jej silna ujemna korelacja z indeksem S&P 500, która powinna pozwolić zmniejszyć całkowite ryzyko portfela. Najbardziej kompleksowym wskaźnikiem zmienności implikowanej, uwzględniającym kwotowania wszystkich opcji o danym terminie i cały uśmiech zmienności, jest – jak wykazaliśmy wyżej – indeks VIX, w którego co prawda nie da się zainwestować bezpośrednio ani nawet przez fundusz ETF (VIX w każdej chwili wyraża oczekiwaną zmienność od tej chwili 30 dni naprzód), ale na który można kupić kontrakty *futures*. Z kolei dla kontraktów *futures* dostępne są indeksy replikujące wyniki strategii polegającej na utrzymywaniu stałej ekspozycji na kontrakty o danym terminie zapadalności, a także fundusze ETF replikujące kształtowanie się poszczególnych indeksów. Z punktu widzenia dywersyfikacji ryzyka istotna jest oczywiście wrażliwość kontraktów *futures* na zmiany S&P 500. Okazuje się, że im krótszy jest termin do zapadalności kontraktu *futures*, tym silniejsza jest jego ujemna korelacja z S&P 500, ale też tym większa zmienność. Stąd „beta" kontraktów VIX *futures* względem S&P 500, tj. korelacja skorygowana relacją odchyleń standardowych

Rysunek 6

Korelacja stóp zwrotu z indeksów replikujących stałą ekspozycję na kontrakty VIX *futures* o terminach 1M–6M z indeksem SPXT



Korelację obliczono na podstawie miesięcznych stóp zwrotu w okresie od grudnia 2005 r. do sierpnia 2013 r.

Źródło: dane Bloomberg, obliczenia własne.

obu zmiennych, rośnie wraz z zapadalnością tych kontraktów, a więc zabezpieczenie ryzyka zmian cen akcji długimi kontraktami będzie wymagało relatywnie większego nominalnego zaangażowania (rysunek 6). Analizując dodanie ekspozycji na zmienność do portfela, trzeba jednak wziąć pod uwagę także stopę zwrotu, w tym przypadku istotnie zmniejszoną przez koszt rolowania kontraktów *futures*, który jest średnio największy (ok. 10–15%) dla krótkich kontraktów i mniejszy (3–5%) dla dłuższych. Koszty rolowania oraz zmienna w czasie i zależna od terminu kontraktu korelacja VIX *futures* z S&P 500 sprawiają, że optymalna ekspozycja na zmienność implikowaną nie może być całkowicie pasywna, lecz jej skala powinna się zmieniać w zależności od sytuacji rynkowej (tj. głównie korelacji i zmienności indeksów). Można to zilustrować na przykładzie inwestora z portfelem P o parametrach (r_P, σ_P), który zastanawia się nad dodaniem do P ekspozycji na VIX. Stopa zwrotu i ryzyko takiego nowego portfela wyniosą odpowiednio

$$r = w_P r_P + w_{VIX} r_{VIX} \tag{13}$$

oraz

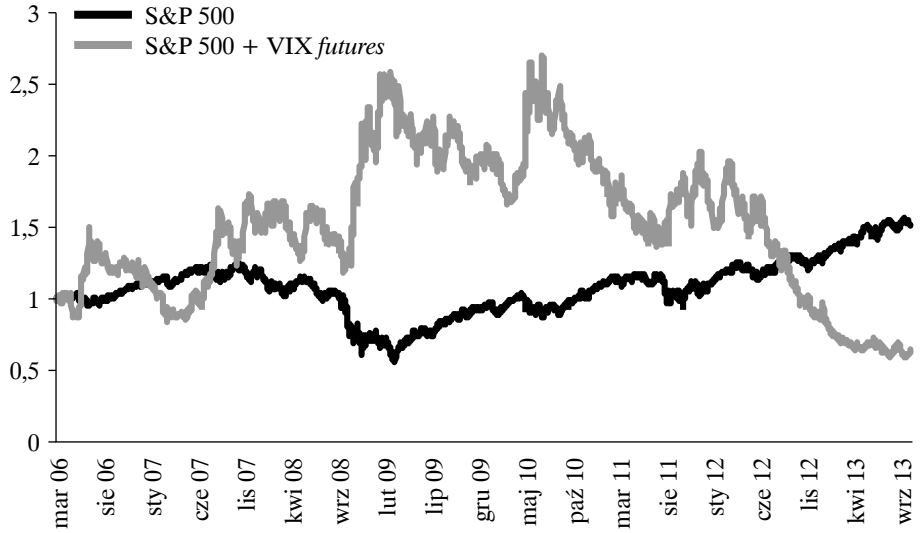
$$\sigma = \sqrt{w_P^2 \sigma_P^2 + w_{VIX}^2 \sigma_{VIX}^2 + 2\rho w_{VIX} w_P \sigma_{VIX} \sigma_P}, \tag{14}$$

gdzie: w_P i w_{VIX} – sumujące się do jedności wagi starego portfela i ekspozycji na kontrakty VIX *futures*, a ρ – współczynnik korelacji stóp zwrotu z P i VIX. Ryzyko nowego portfela będzie zminimalizowane, gdy:

$$w_{VIX} = - w_P \rho \frac{\sigma_P}{\sigma_{VIX}} = (w_{VIX} - 1)\rho \frac{\sigma_P}{\sigma_{VIX}}. \tag{15}$$

Rysunek 7

Dywersyfikacja ryzyka rynku akcji (S&P 500) za pomocą kontraktów VIX *futures*



Jako *proxy* dla ekspozycji na kontrakty VIX *futures* wykorzystano indeks S&P 500 VIX Mid Term Futures; waga ekspozycji w portfelu została dobrana zgodnie ze wzorem (15), a parametry ρ, $\sigma_{S\&P}$, σ_{VIX} wyznaczono na podstawie ruchomego 3-miesięcznego okna obserwacji.

Źródło: dane Bloomberg, obliczenia własne.

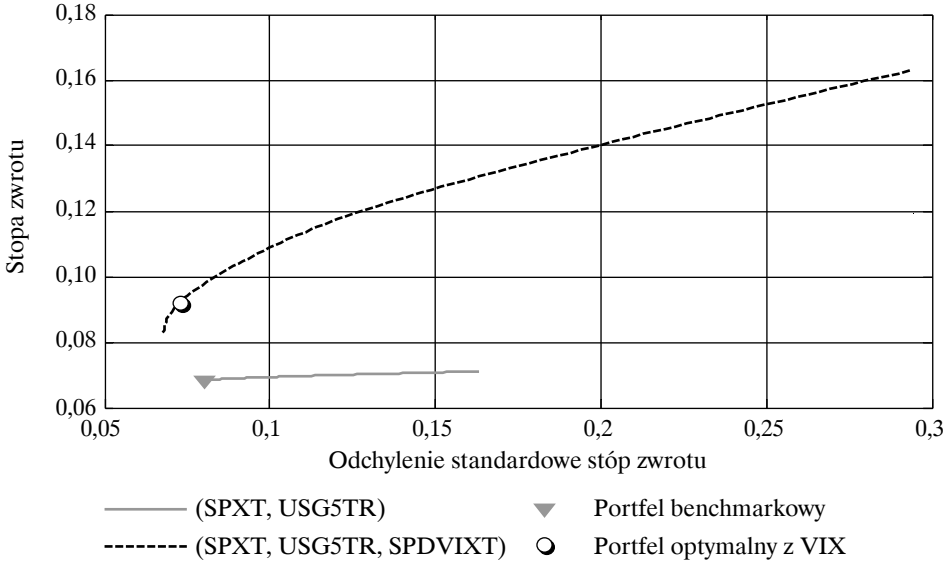
Rysunek 7 przedstawia ewolucję hipotetycznego zdywersyfikowanego portfela akcji *P*, replikowanego indeksem S&P 500, w którym wagę ekspozycji na VIX *futures* (indeks S&P 500 VIX Mid Term Futures) dostosowuje się każdego dnia poprzez reestymację parametrów równania (15). Zabezpieczanie ryzyka rynkowego za pomocą kontraktów terminowych na VIX było szczególnie zyskowne w kryzysowych latach 2008–2010. Z czasem jednak uspokojenie sytuacji na rynkach sprawiło, że ewentualne korzyści z dywersyfikacji zostały zniwelowane przez znaczne koszty rolowania kontraktów VIX *futures*.

Widać zatem, że efektywna ekonomicznie ekspozycja na zmienność implikowaną musi nie tylko maksymalizować korzyści z silnej korelacji VIX *futures* z S&P 500, ale także minimalizować koszty odnawiania pozycji. Taką właśnie aktywną strategię replikuje publikowany przez S&P indeks S&P Dynamic VIX Futures (SPDVIXT), w którym wagi kontraktów krótkich i długich są dostosowywane dynamicznie w zależności od nachylenia krzywej *futures*, tak aby ograniczyć koszt rolowania kontraktów. Na przykład jeśli krzywa *futures* jest nachylona silnie dodatnio (*contango)*, indeks uwzględnia długą pozycję w średnioterminowych kontraktach z wagą 0,7 i krótką pozycję w krótkich kontraktach z wagą 0,3, utrzymując netto długą pozycję w zmienności implikowanej[16]. SPDVIXT jest dostępny od grudnia 2005 r. i do sierpnia 2013 r. osiągnął średnią stopę zwrotu 16,2% przy

[16] Por. SPDVIXT white paper: http://www.spindices.com/documents/methodologies/methodology-sp–-500-dynamic-vix-futures.pdf

Rysunek 8

Efekty dodanie kontraktów terminowych na indeks VIX do portfela akcji i obligacji



Wagi akcji (SPXT), obligacji (USG5TR) i VIX *futures* (SPDVIXT) w portfelu optymalnym wynoszą odpowiednio: 46%, 30% i 24%.

Źródło: dane Bloomberg, obliczenia własne.

odchyleniu standardowym 29,5%. Rysunek 8 przedstawia efektywny zbiór portfeli z ekspozycją na indeks VIX na tle portfela benchmarkowego. Optymalny udział SPDVIXT w portfelu wynosi aż 24%, a jego silna ujemna korelacja z SPXT pozwala dodatkowo zwiększyć udział akcji w portfelu do 46% (przy zmniejszeniu udziału obligacji do 30%, por. tab. 1). Współczynnik Sharpe'a dla strategii o takiej alokacji wynosi 0,99, a więc wzrasta o 1/3 w stosunku do benchmarku, na co składa się jednoczesny wzrost stopy zwrotu (9%) i spadek odchylenia standardowego wyników (7,2%). Efektywna dywersyfikacja ryzyka pozwala też prawie dwukrotnie zmniejszyć VaR dla portfela do 16,9%.

3.3. Krótka pozycja w zmienności zrealizowanej

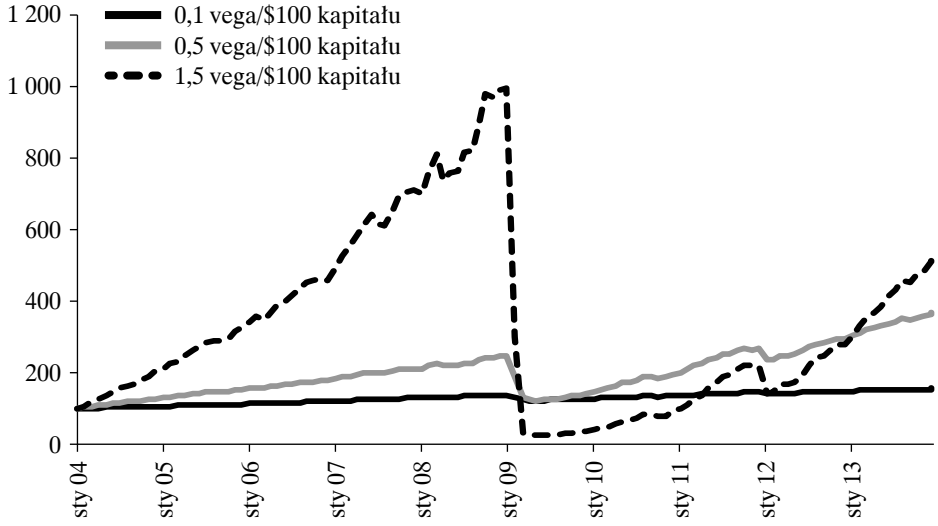
Przesłanką do zajęcia krótkiej pozycji w zmienności – za pomocą opisanego wyżej swapa wariancji – jest utrzymujący się historycznie dodatni średni *spread* pomiędzy zmiennością implikowaną a faktycznie zrealizowaną (Bakshi, Kapadia 2003; Bondarenko 2004). W punkcie 2, za Carrem i Wu (2009a) oraz Signori, Briere, Burguesem (2010), nazwaliśmy ten *spread* premią za ryzyko zmienności (*violatility risk premium* – VRP). Z perspektywy ekonomicznej VRP jest po prostu rentą, jakiej domagają się ci inwestorzy, którzy przyjmują krótką pozycję w zmienności implikowanej, pozwalając pozostałym zneutralizować ryzyko niekorzystnych zmian cen akcji. Stąd ekonomicznym uzasadnieniem dla dodania krótkiej ekspo-

zycji na zmienność do portfela nie jest dywersyfikacja ryzyka – jak w przypadku kontraktów *futures* na VIX – lecz próba zwiększenia stopy zwrotu. Taka perspektywa narzuca natychmiast wątpliwość, czy aby VRP ma charakter trwały i nie zostanie zniwelowana przez arbitraż, zostawiając w portfelu jedynie duże ryzyko, bez atrakcyjnej stopy zwrotu. Wydaje się, że silny popyt hedgingowy, na który wskazuje strukturalna nadwyżka popytu na opcje *put* na indeks S&P 500 (Bollen, Whaley 2004), dodatkowo zapewne wzmożona po ostatnim kryzysie, przemawia jednak za trwałością premii. Jednocześnie niechęć inwestorów do wyeliminowania przez arbitraż premii za ryzyko zmienności to miecz obosieczny – ryzyko znacznych spadków wyceny (tzw. *drawdowns*) musi być wzięte pod uwagę przy rozważaniu dodania krótkiej ekspozycji na zmienność do portfela akcji i obligacji.

Aby oszacować parametry krótkiej pozycji w zmienności, skonstruowaliśmy prosty indeks VARSWAP (na wzór tego używanego przez Signori, Briere i Burguesa 2010), replikujący wyniki osiągane przez inwestora regularnie odnawiającego jednomiesięczny kontrakt *variance swap* na S&P 500. Poziomem *strike* swapa wariancji jest zawsze poziom indeksu VIX z dnia zawarcia transakcji, a rozliczenie kontraktu następuje na podstawie miary 30-dniowej zmienności zrealizowanej, obliczonej zgodnie z metodą CBOE. Dźwignię w strategii określa poziom ekspozycji na ryzyko zmienności, wyrażony w relacji do ustalonego kapitału początkowego oprocentowanego na poziomie LIBOR 1M. Rysunek 9 przedstawia wyniki odnawianie („rolowania") krótkiej pozycji w kontraktcie *variance swap* w zależności od dźwigni, rozumianej tu jako ekspozycja na ryzyko zmienności (vega) na 100 jednostek kapitału. W dalszym ciągu parametryzujemy indeks VARSWAP, przyjmując stałą ekspozycję 0,8 jednostek vega na 100 jednostek zaangażowanego kapitału,

Rysunek 9

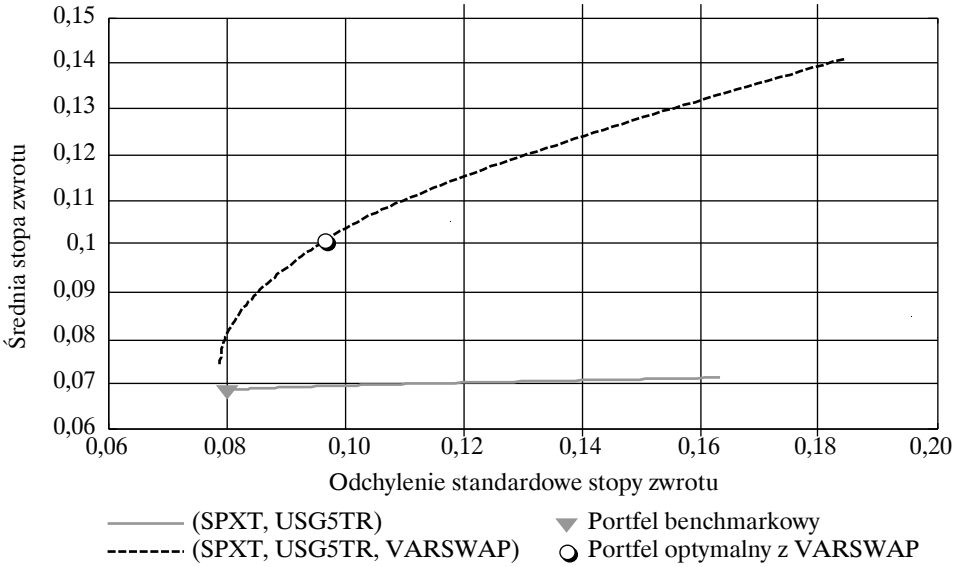
Wyniki odnawiania krótkiej pozycji w kontrakcie *variance swap* o różnych poziomach dźwigni (2003–2013)



Źródło: dane Bloomberg, obliczenia własne.

Rysunek 10

Efekty dodanie kontraktu variance swap do portfela akcji i obligacji



Wagi akcji (SPXT), obligacji (USG5TR) i *variance swap* (VARSWAP) w portfelu optymalnym wynoszą ospowiednio: 10%, 65% i 25%.

Źródło: dane Bloomberg, obliczenia własne.

co wydaje się rozsądnym kompromisem pomiędzy oczekiwaną stopą zwrotu a ryzykiem (pamiętajmy jednak, że oba parametry można zmniejszyć, redukując dźwignię pozycji, co z kolei będzie miało wpływ na optymalną wagę swapa wariancji w portfelu inwestora). Tak zdefiniowany indeks zarobił w analizowanym okresie nieco ponad 20% przy odchyleniu standardowym 28,8%.

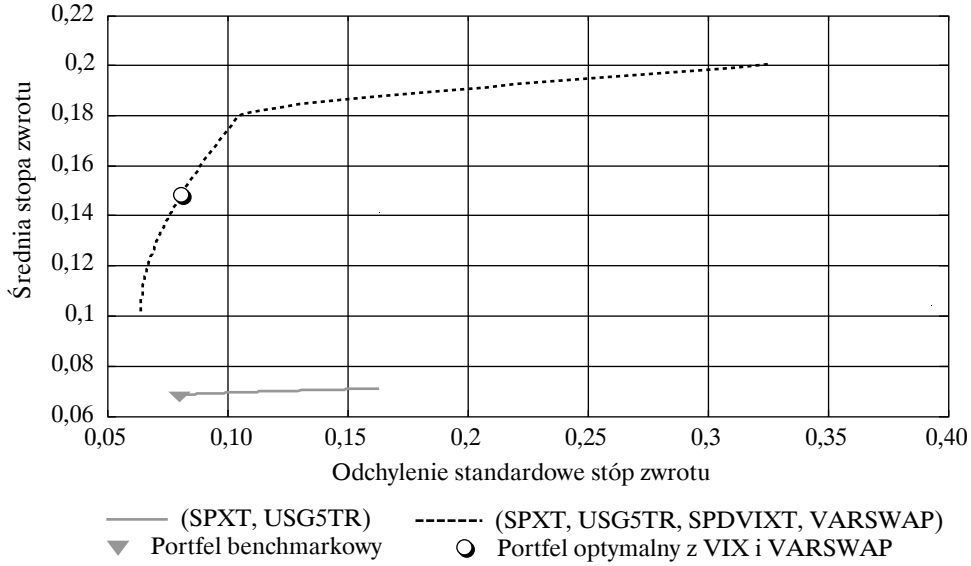
Rysunek 10 przedstawia efektywny zbiór portfeli z krótką ekspozycją na zmienność zrealizowaną na tle portfela benchmarkowego. W nowym portfelu rolę ekspozycji na rynek akcji przejmuje dodatnio z nim skorelowany VARSWAP, którego optymalny udział wynosi aż 25%. Jednocześnie do 65% wzrasta udział obligacji. Współczynnik Sharpe'a dla takiej alokacji wynosi 0,75 – wyraźnie więcej niż dla benchmarku, ale też mniej niż w przypadku dodania długiej ekspozycji na zmienność. Niepokojąco wzrasta także ryzyko portfela – VaR wynosi tu –44% wobec –30% dla benchmarku (por. tab. 1).

3.4. Kombinacja krótkiej pozycji w zmienności zrealizowanej i długiej pozycji w zmienności implikowanej

Ostatnim krokiem analizy jest dodanie do portfela akcji i obligacji jednocześnie krótkiej i długiej ekspozycji odpowiednio na zmienność zrealizowaną i implikowaną. Premia leżąca u podstaw wysokiej stopy zwrotu VARSWAP powinna w dłuższym okresie neutralizować mogący obciążać wyniki portfela koszt długiej

Rysunek 11

Efekty dodania do portfela akcji i obligacji krótkiej i długiej ekspozycji na zmienność



Wagi akcji (SPXT), obligacji (USG5TR), VIX *futures* (SPDVIXT) i *variance swap* (VARSWAP) w portfelu optymalnym wynoszą ospowiednio 15%, 14%, 39% i 32%.

Źródło: dane Bloomberg, obliczenia własne.

ekspozycji na zmienność. Z kolei silna ujemna korelacja VIX z S&P 500 i jednocześnie SPDVIXT powinna stanowić naturalny instrument dywersyfikacji ryzyka.

Istotnie, portfel uwzględniający – obok akcji i obligacji – jednocześnie długą pozycję w kontraktach terminowych na indeks VIX i krótką pozycję w swapie wariancji osiągnął w analizowanym okresie najwyższy współczynnik Sharpe'a 1,58 – czyli ponad dwukrotnie więcej niż benchmark (rys. 11). Jednocześnie efektywna dywersyfikacja ryzyka pozwoliła obniżyć ryzyko portfela, tj. spowadzić VaR portfela do poziomu –11,6%.

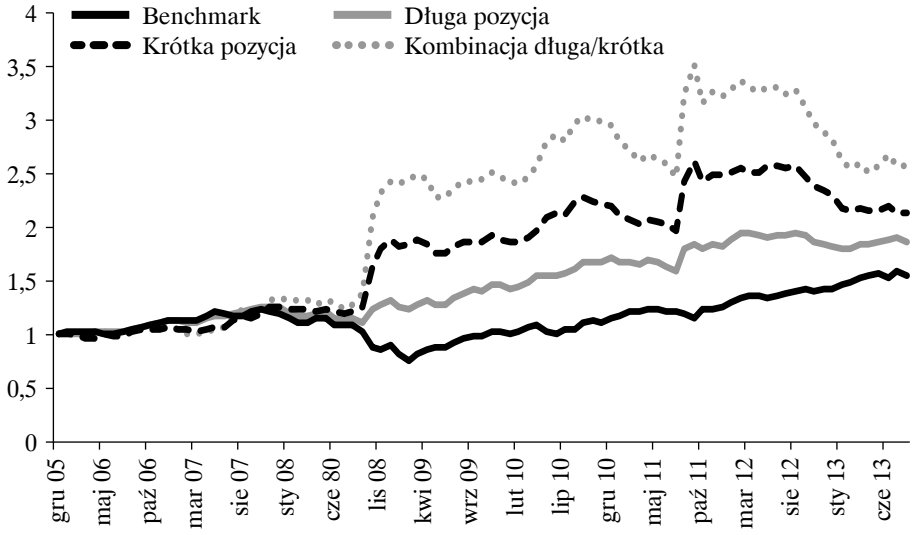
4. Podsumowanie

Rosnąca popularność instrumentów pochodnych na zmienność – kontraktów *futures* na indeks VIX i swapów wariancji – skłania do zadania pytania o ich ekonomiczną rację bytu. Z teoretycznego punktu widzenia funkcja pochodnych na zmienność jest zbliżona do tej, jaką na rynku pełni kontrakt ubezpieczeniowy. Z perspektywy całego rynku możliwość zawierania kontraktów ubezpieczniowych i konkurencyjnego handlu nimi prowadzi – przy pewnych dodatkowych założeniach – do stanu optymalnego w sensie Pareto. Inwestorzy zajmujący długą pozycję w zmienności zabezpieczają się przed ryzykiem, a wystawcy ubezpieczenia (przyjmujący krótką

pozycję w zmienności) to ryzyko przyjmują. W rezultacie kontrakty ubezpieczeniowe – których szczególną odmianą są pochodne na zmienność – dopełniają rynek, który zbliża się do ideału zupełności. Jednak mimo pewnej elegancji, takie rozumowanie jest poprawne tylko pod warunkiem, że kontrakty nie powodują efektów zewnętrznych, inwestorzy mają pełny i symetryczny dostęp do informacji, a wystawcom ubezpieczenia nie grozi ryzyko kredytowe. Oczywiście na prawdziwym rynku założenia te nie są spełnione, co z kolei sprawia, że formalne uzasadnienie konsekwencji dobrobytowych rozpowszechnienia się instrumentów pochodnych na zmienność jest zadaniem dość trudnym. Wydaje się jednak, że pewną wartością byłoby już samo zrozumienie, czy na podstawie dostępnych danych można stwierdzić *ex post*, że przyjęcie ekspozycji na zmienność byłoby korzystne, tzn. poprawiłoby efektywność (zmniejszyło ryzyko lub zwiększyło stopę zwrotu) standardowych portfeli inwestycyjnych. Temu właśnie poświęcony był niniejszy artykuł.

W pierwszej kolejności wyjaśniliśmy, że zmienność w sensie inwestycyjnym można rozumieć albo jako parametr implikowany z cen opcji (zmienność implikowana), albo jako wariancję stóp zwrotu zrealizowanych w ustalonym okresie w przeszłości. Następnie przypomnieliśmy główne fakty stylizowane dotyczące kształtowania się zmienności i na tej podstawie podaliśmy główne przesłanki dla przyjmowania ekspozycji na zmienność. Wyjaśniliśmy także, w jaki sposób można tę ekspozycję uzyskać, tzn. omówiliśmy podstawy teoretyczne konstrukcji najważniejszych instrumentów pochodnych na zmienność. Wreszcie – *last but not least*

Rysunek 12
Ewolucja wyceny przeanalizowanych strategii



Skład portfeli: benchmark (39% SPXT, 61% USG5TR), długa pozycja (46% SPXT, 30% USG5TR, 24% SPDVIXT), krótka pozycja (10% SPXT, 65% USG5TR, 25% VARSWAP), kombinacja długa/krótka pozycja (15% SPXT, 14% USG5TR, 39% SPDVIXT, 32% VARSWAP). Optymalne portfele wyznaczone metodą maksymalizacji współczynnika Sharpe'a.

Źródło: obliczenia własne.

– sprawdziliśmy, że instrumenty pochodne na zmienność mogą zwiększyć efektywność (tj. zmniejszyć ryzyko lub zwiększyć stopę zwrotu) tradycyjnych planów inwestycyjnych. W szczególności przeanalizowaliśmy efekty dodania do portfela składającego się wyjściowo z akcji i obligacji ekspozycji na zmienność w formie: a) długiej pozycji w zmienności implikowanej, b) krótkiej pozycji w zmienności zrealizowanej oraz c) kombinacji krótkiej pozycji w zmienności zrealizowanej i długiej pozycji w zmienności implikowanej. Tabela 1 oraz rysunek 12 przedstawiają syntetycznie parametry wszystkich przeanalizowanych strategii. Widać wyraźnie, że dodanie do portfela ekspozycji na zmienność pozwala istotnie poprawić jego efektywność. Największą korzyść – maksymalizację stopy zwrotu i minimalizację ryzyka mierzonego poziomem VaR – można jednak odnieść dopiero, uwzględniając jednocześnie oba kierunki ekspozycji na zmienność. Długa pozycja w VIX *futures* dywersyfikuje wówczas ryzyko rynkowe portfela akcji, pozwalając zarabiać nawet w okresach gwałtownych zaburzeń na giełdzie. Z kolei sprzedaż zmienności zrealizowanej w swapach wariancji dywersyfikuje niejako samo ryzyko zmienności.

Tekst wpłynął: 11 grudnia 2013 r.
(wersja poprawiona: 30 września 2015 r.)

Bibliografia

Alexander C., Korovilas D., *The Hazards of Volatility Diversification*, ICMA Centre Discussion Papers in Finance DP2011-04, ICMA, 2011.

Bakshi G., Kapadia N., *Delta-hedged Gains and the Negative Market Volatility Risk Premium*, „Review of Financial Studies" 2003, nr 16(2).

Black F., Scholes M.S., *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, „Journal of Political Economy" 1973, nr 81(3).

Black F., *The Pricing of Commodity Contracts*, „Journal of Financial Economics" 1976 nr 3(1).

Bollen N.P.B., Whaley R.E., *Does Net Buying Pressure Affect the Shape of Implied Volatility Functions?*, „Journal of Finance" 2004, nr 59(2).

Bondarenko O., *Market Price of Variance Risk and Performance of Hedge Funds*, University of Illinois Working Paper, Chicago 2004.

Bossu S., *Introduction to Variance Swaps*, „Wilmott Magazine" 2006.

Brenner M., Galai D., *New Financial Instruments for Hedging Changes in Volatility*, „Financial Analysts Journal" 1989, nr 45(4).

Carr P., Lee R., *Realised Volatility and Variance: Options via Swaps*, „Risk" 2007.

Carr P., Lee R., *Volatility Derivatives*, „Annual Review of Financial Economics" 2009, nr 1(1).

Carr P., Lewis K., *Corridor Variance Swaps*, „Risk" 2004.

Carr P., Madan D., *Towards a Theory of Volatility Trading*, w *Volatility*, red. R. Jarrow, Risk Publications, London 2001.

Carr P., Wu L., *Variance Risk Premiums*, „Review of Financial Studies" 2009, nr 22(3).

CBOE, *The CBOE Volatility Index – VIX*, Chicago Board Options, Chicago 2003.
CBOE, *The CBOE Volatility Index – VIX*, Chicago Board Options, Chicago 2009.
Cox J.C., Rubinstein M., *Options Markets*, Prentice Hall, Upper Saddle River 1985.
Daigler R.T., Rossi L., *A Portfolio of Stocks and Volatility*, „The Journal of Investing" 2006, nr 15(2).
Dash S., Moran M.T., *VIX as a Companion for Hedge Fund Portfolios*, „The Journal of Alternative Investments" 2005, nr 8(3).
Demeterfi K., Derman E., Kamal M., Zou J., *A Guide to Volatility and Variance Swap*, „Journal of Derivatives" 1999, nr 6(4).
Derman E., Demeterfi K., Kamal M., Zou J., *More than You Ever Wanted to Know about Volatility Swaps*, Quantitative Strategies Research Notes, Goldman Sachs, New York 1999.
Derman E., Kamal M., Kani I., McClure J., Pirasteh C., Zou J., *Investing in Volatility*, „Futures and Options World" 1998, nr 147.
Derman E., Taleb N.N., *The Illusions of Dynamic Replication*, „Quantitative Finance" 2005, nr 5(4).
Dupire B., *Model art*, Risk Books, London 1993.
Dupire B., *A Unified Theory of Volatility*, Risk Books, London 2004.
Egloff D., Leippold M., Wu L., *The Term Structure of Variance Swap Rates and Optimal Variance Swap Investments*, „Journal of Financial and Quantitative Analysis" 2010, nr 45(5).
Fleming J., Ostdiek B., Whaley R.E., *Predicting Stock Market Volatility: A New Measure*, „Journal of Futures Markets" 1995, nr 15(3).
Galai D., *A Proposal for Indexes for Traded Call Options*, „The Journal of Finance" 1979, nr 34(5).
Gastineau G.L., *An Index of Listed Option Premiums*, „Financial Analysts Journal" 1977, nr 33(3).
Hafner R., Wallmeier M., *Optimal Investments in Volatility*, „Financial Markets and Portfolio Management" 2008, nr 22(2).
Herrmann R., Luedecke T., *Why the VOLAX Future has Failed*, 9th Symposium on Finance, Banking and Insurance, Universitaet Karlsruhe, 2002.
Jabłecki J., Kokoszczyński R., Sakowski P., Ślepaczuk R., Wójcik P., *Pomiar i modelowanie zmienności – przegląd literatury*, „Ekonomia" 2013, nr 31.
Kolanovic M., *The VIX: Rewards and Risks of a Rapidly Growing Market*, Columbia University Financial Engineering Practitioners Seminar 2012.
Markowitz H., *Portfolio Selection*, „The Journal of Finance" 1952, nr 7(1).
Merton R.C., *Theory of Rational Option Pricing*, „Bell Journal of Economics" 1973, nr 4(1).
Moran M.T., Dash S., *VIX Futures and Options: Pricing and Using Volatility Products to Manage Downside Risk and Improve Efficiency in Equity Portfolios*, „The Journal of Trading" 2007, nr 2(3).
Neuberger A., *The Log Contract*, „The Journal of Portfolio Management" 1994, nr 20(2).
Signori O., Briere M., Burgues A., *Volatility Exposure for Strategic Asset Allocation*, „Journal of Portfolio Management" 2010, nr 36(3).
Szado E., *VIX Futures and Options: A Case Study of Portfolio Diversification During the 2008 Financial Crisis*, „The Journal of Alternative Investments" 2009, nr 12(2).
Whaley R.E., *Derivatives on Market Volatility: Hedging Tools Long Overdue*, „Journal of Derivatives" 1993, nr 1.
Yamai Y., Yoshiba T., *Value-at-risk Versus Expected Shortfall: A practical Perspective*, „Journal of Banking & Finance" 2005, nr 29(4).

INSTRUMENTY POCHODNE NA ZMIENNOŚĆ – NOWA KLASA AKTYWÓW FINANSOWYCH

Streszczenie

Celem artykułu jest przedstawienie dwóch głównych instrumentów pochodnych na zmienność (kontrakty *futures* i swapy wariancji) jako nowej klasy aktywów i ich analiza z punktu widzenia optymalizacji portfela inwestora. Wykorzystując dane z rynku USA autorzy dowodzą, że zarówno dodanie krótkiej, jak i długiej ekspozycji na zmienność do portfela może istotnie poprawić jego efektywność (zwiększyć stopę zwrotu w relacji do ryzyka). Jednak największe korzyści – w sensie zwiększenia stopy zwrotu i redukcji ryzyka portfela – przynosi inwestorom jednoczesne dodanie kombinacji krótkiej pozycji w zmienności zrealizowanej i długiej pozycji w zmienności implikowanej, które naturalnie się uzupełniają.

Słowa kluczowe: zmienność, kontrakty *futures* na VIX, *variance* swap, wybór portfela

VOLATILITY DERIVATIVES – A NEW CLASS OF FINANCIAL ASSETS

Summary

The goal of this article is to introduce the two key volatility derivatives (volatility futures and variance swaps) in the context of portfolio optimization. Using data from the US stock market, the authors show that adding either long or short exposure to volatility can substantially improve portfolio efficiency (i.e. improve its return-risk ratio). The most beneficial strategy – in the sense of maximizing return and minimizing value-at-risk – combines exposure to both implied volatility and realized volatility, which naturally complement one another.

Key words: volatility, VIX futures, variance swaps, portfolio optimization

ПРОИЗВОДНЫЕ ИНСТРУМЕНТЫ В УСЛОВИЯХ ВОЛАТИЛЬНОСТИ – НОВЫЙ КЛАСС ФИНАНСОВЫХ АКТИВОВ

Резюме

Целью статьи является презентация двух главных производных инструментов в условиях волатильности (контракты фьючерс и вариационные свопы) в качестве нового класса активов и их анализ с точки зрения оптимизации портфеля инвестора. Используя данные рынка США, авторы доказывают, что добавление в портфель как короткой, так и длинной составляющей, учитывающей волатильность, может существенным образом улучшить его эффективность (увеличить норму окупаемости по отношению к риску). Однако наибольшие выгоды, т.е. увеличение нормы окупаемости и редукцию риска портфеля, инвесторы получают при комбинации короткой позиции в реализованной волатильности и длинной позиции в подразумеваемой волатильности, которые естественным образом дополняют друг друга

Ключевые слова: волатильность, контракты фьючерс на VIX, variance swap, выбор портфеля